אלגברה ב2

ארזים ©

28 ביוני 2017

1 הרחבות גלואה אינסופיות

הגדרנו טופולוגיה על $\mathrm{Gal}\left({}^{N}/_{K}\right)$.בסיס של הסביבות הפתוחות של 1 הוא

$$U_E = \mathrm{Gal}\left({}^{N}/_{E}\right)$$

באשר $K \subseteq E \subseteq N$ עם $[E:K] < \infty$. הסביבות הפתוחות של σ הן σU_E. ראינו שהקבוצות U_E הן פתוחות וסגורות.

הבחנה נניח כי $K \subseteq L \subseteq N$ תת שדה. אזי

$$\mathrm{Gal}\left({}^{N}/_{L}\right) = \bigcap_{K \subseteq E \subseteq L \ finite} \mathrm{Gal}\left({}^{N}/_{E}\right)$$

וזו קבוצה סגורה.

טענה 1.1 אם $K \subseteq L \subseteq N$ מגדל של הרחבות אלגבריות עם ${}^{N}/_{K}$ גלואה, ואם $\sigma : L \to N$ עם $\sigma \mid_K = \mathrm{id}$, אזי ניתן להרחיב את σ להעתקה $\hat{\sigma} : N \to N$ עם $\hat{\sigma} \mid_L = \sigma$.

הוכחה: את המקרה הסופי עשינו בעבר. המקרה האינסופי נובע ממנו על ידי הלמה של צורן - נדלג על הפרטים. ■

משפט 1.2 תהי ${}^{N}/_{K}$ הרחבת גלואה עם חבורת גלואה $G = \mathrm{Gal}\left({}^{N}/_{K}\right)$. נסמן $\leq_c, \lhd_c$ תת חבורה (ונורמלית) סגורה. אזי ההתאמות

$$N^H = \{x \in N \mid \forall h \in H \ \ hx = x\} \leftarrow H \leq_c G$$
$$K \subseteq L \subseteq N \mapsto \mathrm{Gal}\left({}^{N}/_{L}\right) \leq_c G$$

בין תת חבורות סגורות של G לתת שדות של ${}^{N}/_{K}$ הן הופכיות ומקיימות את כל התכונות מהמפט היסודי של תורת גלואה (הפיכת סדר, שימור אינדקסים סופיים, שמירת נורמליות וכן הלאה).

הוכחה: נראה רק $1-1$. בכיוון הראשון, יהי $K \subseteq L \subseteq N$ תת שדה ונסמן $H = \mathrm{Gal}\left({}^{N}/_{L}\right)$, וכן $N^H = \{x \in N \mid \forall h \in H \ \ hx = x\}$. נרצה להראות כי $N^H = L$. ברור כי $L \subseteq N^H$ (מההגדרה). נניח בשלילה שזו הכלה ממש - אז יש $x \in N^H \backslash L$. כיוון שהאיבר x הוא אלגברי מעל K, ולכן מעל L, ההרחבה ${}^{L(x)}/_{L}$ היא סופית, ולכן יש $L(x) \subseteq N_0 \subseteq N$ כך שההרחבה

${}^{N_0}/_L$ היא גלואה וסופית). מתורת גלואה הסופית, יש $\tau \in N_0 \to N_0$ עם $\tau \mid_{L_0} = \mathrm{Id}$, אבל $\tau(x) \neq x$. נרחיב את τ שרירותית אל $\hat{\tau} : N \to N$, כלומר $\hat{\tau} \in \mathrm{Gal}\left({}^{N}/_{L}\right) = H$. אזי כיוון שלקחנו $x \in N^H$ נקבל כי $x = \hat{\tau}(x) = \tau(x) \neq x$ בסתירה. אם כן, $L = N^H$.

כעת, נוכי דבר מעט חזק יותר מאשר הכיוון השני - ניקח $H \leq G$, ונסמן $L = N^H$. אז נוכיח כי $\overline{H} = \mathrm{Gal}\left({}^{N}/_{L}\right)$ (כלומר הסגור של H - הקבוצה הסגורה המינימלית ביחס להכלה שמכילה את H). נעיר שיש תנאים שקולים לכך שיתקיים $Z = \overline{H}$ - זה שקול לשלושת הדברים הבאים (יחד):

1. $X \subseteq Z$.
2. Z סגורה.
3. לכל $z \in Z$ ולכל סביבה פתוחה $z \in U$ מתקיים $U \cap X \neq \emptyset$.

ברור שיספיק לנו להוכיח $\overline{H} = \mathrm{Gal}\left({}^{N}/_{L}\right)$, כי אם H סגורה אזי $H = \overline{H}$ (זה חזק יותר משרצינו). נוכיח את התנאים. ברור כי $H \leq \mathrm{Gal}\left({}^{N}/_{L}\right)$, וראינו כבר שזו סגורה. נותר להוכיח את התנאי השלישי.

נקח $\sigma \in \mathrm{Gal}\left({}^{N}/_{L}\right)$, ונקח ${}^{E}/_{K}$ סופית, $E \subseteq L$ - נסתכל בסביבה σU_E. ניקח $E \subseteq N_0 \subseteq N$ כאשר ${}^{N_0}/_{K}$ גלואה סופית. אז $U_{N_0} \subseteq U_E$, ואז יספיק לנו להוכיח כי $\sigma U_{N_0} \cap H \neq \emptyset$ - כלומר, בלי הגבלת הכלליות, ${}^{E}/_{K}$ גלואה. נרצה למצוא $\tau \in H$ עם $\sigma \mid_E = \tau \mid_E$. נסמן $\rho = \sigma \mid_E$. נסמן כעת

$$H_0 = \{\tau \mid_E \mid \tau \in H\}$$

אזי

$$E^{H_0} = \{x \in E \mid \forall \tau \in H \;\; \tau x = x\} = \{x \in E \mid x \in L\} = E \cap L$$

ולכן ממשפט גלואה לחבורות סופיות, נקבל

$$H_0 = \mathrm{Gal}\left({}^{E}/_{E \cap L}\right)$$

אבל לכל $x \in E \cap L$ מתקיים $\rho(x) = \sigma(x) = x$. לכן $\rho \in \mathrm{Gal}\left({}^{E}/_{E \cap L}\right) = H_0$, ולכן יש $\tau \in H$ עם $\sigma \mid_E = \tau \mid_E$, כמו שרצינו. ■