אלגברה ב2

ⓒ ארזים

28 במרץ 2017

1 הרחבת שדות

היינו באמצע הוכחת טענה - נותר להוכיח את הטענה הבאה:

טענה 1.1 תהי E/F הרחבה סופית, $\alpha \in E$. אזי נגדיר $I = \{f \in F[x] \mid f(\alpha) = 0\}$, וניקח ממנו $f \neq 0$ ממעלה מינימלית, שנסמנה n. אזי $\{1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}\}$ מהווה בסיס של $F(\alpha)/F$, $F[\alpha] = F(\alpha)$, וכן $[F(\alpha) : F] = n = \deg f$.

הוכחה: אם $\{1, \dots, \alpha^{n-1}\}$ תלויים לינארית, אזי

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i \alpha^i = 0$$

כאשר לא כל a_i הם 0. לכן קיבלנו פולינום ממעלה לכל היותר $n-1$ שמתאפס על α, בסתירה למינימליות f. לכן הקבוצה שלנו בלתי תלוייה לינארית.

נראה ראשית כי

$$F[\alpha] \subseteq \operatorname{Span}_F \{1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}\}$$

אכן, אם $g \in F[x]$, נחלק עם שארית בפולינום f:

$$g = qf + r$$

כאשר $\deg r < n$. אזי

$$g(\alpha) = f(\alpha) q(\alpha) + r(\alpha) = r(\alpha) \in \operatorname{Span}_F \{1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}\}$$

כעת, נוכיח כי $F(\alpha) \subseteq \operatorname{Span}\{1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}\}$. נקח $g \in F[x]$ עם $g(\alpha) \neq 0$. נרצה להראות שגם $\frac{1}{g(\alpha)} \in \operatorname{span}\{1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}\}$.

$g(\alpha) \neq 0$, ולכן $g \nmid f$. f אי פריק, ולכן $\gcd(f, g) = 1$. לכן קיימים $A, B \in F[x]$ שמקיימים

$$A(x) f(x) + B(x) g(x) = 1$$

כעת,

$$\begin{aligned} B(\alpha)\,g(\alpha) &= 1 \\ \frac{1}{g(\alpha)} &= B(\alpha) \in F[\alpha] \subseteq \operatorname{Span}_F\left\{1,\alpha,\ldots,\alpha^{n-1}\right\} \end{aligned}$$

לסיכום קיבלנו

$$F(\alpha) = F[\alpha] = \operatorname{Span}_F\left\{1,\alpha,\ldots,\alpha^{n-1}\right\}$$

וזו גם קבוצה בלתי תלויה לינארית. $\blacksquare$

דוגמא תהי $F/\mathbb{Q}$ הרחבה ריבועית, כלומר $[F:\mathbb{Q}]=2$. למשל $F=\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ - כי הפולינום האי פריק של $\sqrt{2}$ מעל $\mathbb{Q}$ הוא x^2-2 (אי פריק מאיזנשטיין). הבסיס הוא $\left\{1,\sqrt{2}\right\}$, כלומר

$$\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) = \left\{a+b\sqrt{2} \mid a,b\in\mathbb{Q}\right\}$$

באופן כללי, נקח $\alpha\in F\backslash\mathbb{Q}$. אזי $1,\alpha$ בלתי תלויים לינארית מעל $\mathbb{Q}$. לכן הם בסיס, כי זו הרחבה ריבועית. אזי

$$\alpha^2 = a_1\alpha + a_0$$

לכן $f(x)=x^2-a_1x-a_0$ הוא הפולינום המינימלי של α. נבצע השלמה לריבוע:

$$f(x) = \left(x-\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0 - \frac{a_1^2}{4}$$

נקבל כי

$$F = \mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}\left(\underbrace{\alpha-\frac{1}{2}a_1}_{\beta}\right) = \mathbb{Q}\left(\sqrt{\frac{4a_0+a_1^2}{4}}\right)$$

וזאת היות ומתקיים $\beta^2 = a_0+\frac{1}{4}a_1^2 = \frac{4a_0+a_1^2}{4}$.

מסקנה 1.2 אם $F/\mathbb{Q}$ הרחבה ריבועית אזי $F=\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$, כאשר $d\in\mathbb{Q}$.

תהי E/F הרחבה של שדות, ויהי $\alpha\in E$.

הגדרה 1.3 נאמר כי α <u>אלגברי</u> אם $F(\alpha)/F$ סופית. נסמן $\operatorname{irr}(\alpha,F)\in F[x]$ את הפולינום המתוקן ממעלה מינימלית שמאפס את α (ראינו שהוא אי פריק).

הגדרה 1.4 אם α אינו אלגברי, α נקרא נעלה (טרנסנדנטלי).

הגדרה 1.5 ההרחבה E/F נקראת אלגברית אם כל $\alpha\in E$ אלגברי מעל F.

הגדרה 1.6 E נקרא סגור אלגברית אם אין לא הרחבות אלגבריות פרט לעצמו. באופן שקול: אם α אלגברי מעל E, אזי $\alpha\in E$.

הגדרה 1.7 הרחבה אלגברית E/F, כאשר E סגור אלגברית, נקראת סגור אלגברי של F.

מטרתנו להראות את הדברים הבאים:

טענה 1.8 אם E סגור אלגברית, אז לכל פולינום $f\in E\left[x\right]$ ממעלה חיובית יש שורש בתוך E.

משפט 1.9 לכל שדה F יש סגור אלגברי.

כדי להראות את אלה, נבנה כל מיני כלים.

למה 1.10 יהי F שדה, $f\in F\left[x\right]$ פולינום אי פריק. אזי

$$E=F\left[x\right]/\left(f\right)$$

היא הרחבה סופית של F, ואם נסמן בתור $\alpha\in E$ את מחלקת השקילות של x, כלומר $\alpha=x+\left(f\right)$, אזי $E=F\left(\alpha\right)$, וכן $\operatorname{irr}\left(\alpha,F\right)=f\left(x\right)$.

הוכחה: נרצה להראות כי E שדה. נקח $g\in F\left[x\right]$ כך שמתקיים $g+\left(f\right)\neq 0\in E$. אזי $g\notin\left(f\right)$, כלומר $f\nmid g$. f אי פריק, ולכן $\gcd\left(f,g\right)=1$, ולכן קיימים $A,B\in F\left[x\right]$ המקיימים

$$Af+Bg=1$$

לכן

$$Bg+\left(f\right)=1+\left(f\right)$$

לכן B הוא ההופכי של g בתוך E. לכן E הוא שדה. כעת, נסתכל על

$$f\left(\alpha\right)=f\left(x\right)+\left(f\right)=0+\left(f\right)\in E$$

לכן $f\left(\alpha\right)=0\in E$. יתר על כן, נזהה את F בתור תת שדה של E על ידי

$$c\in F\leftrightarrow c+\left(f\right)$$

אזי f הוא הפולינום המינימלי שמאפס את α, וכן $E=F\left[\alpha\right]$. ■