אלגברה ב2

ארזים ©

13 ביוני 2017

תהי L/K הרחבת שדות סופית, ויהי $\alpha \in L$. α מגדיר העתקה K־לינארית:

$$M_\alpha : L \to L$$
$$M_\alpha (t) = \alpha t$$

נגדיר

$$\mathrm{Tr}_{L/K}(\alpha) = \mathrm{Tr}_K^L(\alpha) = \mathrm{Tr}(M_\alpha)$$

באופן דומה מגדירים

$$\mathrm{N}_{L/K}(\alpha) = \mathrm{N}_K^L(\alpha) = \det(M_\alpha)$$

דוגמה ניקח $L = \mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$, $K = \mathbb{Q}$, $\alpha = a + b\sqrt{d}$. ניקח בסיס $\{1, \sqrt{\alpha}\}$ להרחבה שלנו. α מיוצג על ידי

$$\begin{pmatrix} a & db \\ b & a \end{pmatrix}$$

בבסיס שבחרנו. לכן

$$\mathrm{Tr}(\alpha) = 2a$$
$$\mathrm{N}(\alpha) = a^2 - b^2 d$$

תכונות

$$\mathrm{Tr}(\alpha + \beta) = \mathrm{Tr}(\alpha) + \mathrm{Tr}(\beta)$$
$$\mathrm{Tr}(\lambda\alpha) = \lambda \mathrm{Tr}(\alpha)$$
$$\mathrm{N}(\alpha\beta) = \mathrm{N}(\alpha)\mathrm{N}(\beta)$$
$$\mathrm{N}(\lambda\alpha) = \lambda^{[L:K]}\mathrm{N}(\alpha)$$

כאשר $\alpha,\beta \in L$, $\lambda \in K$. נסמן m_α את הפולינום המינימלי של α, וכן f_α את הפולינום האופייני של M_α. מלינארית ומחשבון מעלות:

$$f_\alpha = m_\alpha^{[L:K(\alpha)]}$$

משום שיש להם את אותם גורמים אי פריקים. כעת,

$$\mathrm{Tr}\left(\alpha\right) = \sum_{f_\alpha(\beta)=0} \beta = \left(\sum_{m_\alpha(\beta)=0} \beta\right)\left[L:K\left(\alpha\right)\right]$$

$$\mathrm{N}\left(\alpha\right) = \prod_{f_\alpha(\beta)=0} \beta = \left(\prod_{m_\alpha(\beta)=0} \beta\right)^{[L:K(\alpha)]}$$

נניח כי L/K לא פרידה לכן יש שתי אפשרויות:

1. $\left[K\left(\alpha\right):K\right]$ לא פרידה. מכאן נקבל כי המציים הוא $p>0$, וכן m_α הוא פולינום במשתנה x^p. לכן $\mathrm{Tr}\equiv 0$ כי הוא שווה למקדם של $x^{\deg m_\alpha - 1}$.
2. $\left[L:K\left(\alpha\right)\right]$ לא פרידה. מכאן נקבל כי המציין הוא $p>0$, וכן $p \mid \left[L:K\left(\alpha\right)\right]$. לכן $\mathrm{Tr}\equiv 0$.

בכל מקרה קיבלנו עקבה טריוויאלית, ולכן מעתה נניח כי L/K פרידה. אזי

$$\mathrm{Tr}_K^L\left(\alpha\right) = \left[L:K\left(\alpha\right)\right]\left(\sum_{m_\alpha(\beta)=0} \beta\right) = \sum_{\sigma\in\mathrm{Emb}_K\left(L,\overline{K}\right)} \sigma\left(\alpha\right)$$

וזאת בגלל טענות שראינו בכיתה על הרמת שיכונים. אם L/K גלואה, אזי

$$\mathrm{Tr}_K^L\left(\alpha\right) = \sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(L/K)} \sigma\left(\alpha\right)$$

עם הנורמה קורה משהו אנלוגי לחלוטין:

$$\mathrm{N}_K^L\left(\alpha\right) = \left(\prod_{m_\alpha(\beta)=0} \beta\right)^{[L:K(\alpha)]} = \prod_{\sigma\in\mathrm{Gal}(L/K)} \sigma\left(\alpha\right)$$

טענה 0.1 $\mathrm{Tr}_K^L \not\equiv 0$.

הוכחה: נובע ישירות מאי תלות של כרקטרים - העתקת העקבה היא סכום של שיכונים, כפי שראינו, וכל שיכון כזה הוא כרקטר של החבורה הכפלית. המקדמים בצירוף שמגדיר את העקבה אינם 0, ולכן $\mathrm{Tr}_K^L\left(\alpha\right) \not\equiv 0$. ■

מסקנה 0.2 התבנית $\left(x,y\right) = \mathrm{Tr}_K^L\left(xy\right)$ אינה מנוונת.

יהי $x \in L$. אם לכל $y \in L$ מתקיים $\mathrm{Tr}_K^L(xy)=0$ וכן $x \neq 0$ זו סתירה לטענה הקודמת, ולכן סיימנו (כפל באיבר הפיך זה חד־חד־ערכי ועל).

משפט 0.3 (הילברט 90, גרסה חיבורית) תהי L/K הרחבת גלואה ציקלית מסדר n עם יוצר σ. אזי $\beta \in L$ מקיים $\mathrm{Tr}(\beta)=0$ אם ורק אם $\beta=\alpha-\sigma(\alpha)$ עבור $\alpha \in L$ כלשהו.

הוכחה: כיוון אחד קל ־ אם $\beta=\alpha-\sigma(\alpha)$ אזי

$$\mathrm{Tr}(\beta)=\mathrm{Tr}(\alpha-\sigma(\alpha))=\mathrm{Tr}(\alpha)-\mathrm{Tr}(\sigma(\alpha))=0$$

בכיוון השני, ניקח $\theta \in L$ עבורו $\mathrm{Tr}(\theta)\neq 0$ (הנחנו $\mathrm{Tr}(\beta)=0$). נגדיר

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1}{\mathrm{Tr}(\theta)}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\sigma^i(\theta)\left(\sum_{j=0}^{i-1}\sigma^j(\beta)\right)\right)\\
\sigma(\alpha) &= \frac{1}{\mathrm{Tr}(\theta)}\left(\sum_{i=2}^{n}\sigma^i(\theta)\left(\sum_{j=1}^{i}\sigma^j(\beta)\right)\right)=\\
\alpha-\sigma(\alpha) &= \frac{1}{\mathrm{Tr}(\theta)}\left(\beta\sum_{i=1}^{n-1}\sigma^i(\theta)-\theta\sum_{i=1}^{n-1}\sigma^i(\beta)\right)=\\
&= \frac{1}{\mathrm{Tr}(\theta)}\left(\beta\sum_{i=0}^{n-1}\sigma^i(\theta)-\theta\sum_{i=0}^{n-1}\sigma^i(\beta)\right)=\\
&= \frac{1}{\mathrm{Tr}(\theta)}\left(\beta\mathrm{Tr}(\theta)-\cancelto{0}{\theta\mathrm{Tr}(\beta)}\right)=\beta
\end{aligned}$$

■

משפט 0.4 (הילרט 90, גרסה כפלית) תהי L/K הרחבת גלואה ציקלית מסדר n עם יוצר σ. אזי $\beta \in L$ מקיים $\mathrm{N}(\beta)=1$ אם ורק אם $\beta=\frac{\alpha}{\sigma(\alpha)}$ עבור $\alpha \in L$.

ההוכחה דומה, ונשארת כתרגיל.

מסקנה 0.5 שלשות פיתגוריות: נתבונן בהרחבה $\mathbb{Q}(i)/\mathbb{Q}$. נחפש $a,b\in\mathbb{Q}$ עם $a^2+b^2=1$. זה שקול לכך שמתקיים $\mathrm{N}_{\mathbb{Q}}^{\mathbb{Q}(i)}(a+ib)=1$, ולכן

$$a+bi=\frac{c+di}{c-di}=\frac{(c+di)^2}{c^2+d^2}=\frac{c^2-d^2}{c^2+d^2}+i\frac{2cd}{c^2+d^2}$$

כי שיכון גלואה שיוצר את ההרחבה הוא ההצמדה המרוכבת. מכאן קיבלנו את כל השלשות הפיתגוריות:

$$\left(c^2-d^2,2cd,c^2+d^2\right)$$