אלגברה ב2

ⓒ ארזים

27 ביוני 2017

הגדרה 0.1 חבורה G תקרא "חבורת גלואה" אם יש הרחבת גלואה של שדות L/K עם $G \cong \mathrm{Gal}\left(L/K\right)$.

משפט 0.2 תהי G חבורה. התנאים הבאים שקולים:

1. G חבורת גלואה.
2. G היא חבורה (טופולוגית - כלומר יש טופולוגיה, והכפל וההופכי הן רציפות) קומפקטית, האוסדורף ואי־קשירה לחלוטין (כל רכיב קשירות הוא נקודה).
3. G היא גבול הפוך של חבורות סופיות - קיימות קבוצה I (סדורה חלקית שבה לכל שני איברים יש סופרימום) ובחירה $\{G_i\}_{i\in I}$ של חבורות סופיות, וקיימות העתקות מקשרות $\varphi_{ij} : G_i \to G_j$ לכל $i \geq j$ כך שהדיאגרמה הבא מתחלפת לכל $i \geq j \geq k$

$$\begin{tikzcd} G_i \arrow[rr, "\varphi_{ij}"] \arrow[dr, "\varphi_{ik}"'] & & G_j \arrow[dl, "\varphi_{jk}"] \\ & G_k & \end{tikzcd}$$

ואז

$$G = \varprojlim G_i = \left\{ \left(g_i\right)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} G \mid \forall i \leq j \;\; \varphi_{ij}\left(g_i\right) = g_j \right\}$$

4. G היא תת חבורה סגורה של מכפלה ישרה של חבורות סופיות (הטופולוגיה על כל חבורה סופית היא דיסקרטית, והטופולוגיה על המכפלה היא טופולוגיית המכפלה).

הערה 0.3 חבורה כזו נקראת חבורה <u>פרו־סופית</u>.

הוכחה: $3 \Leftarrow 1$: ניקח I את אוסף כל התת הרחבות L_0 של L/K שהן גלואה וסופיות. נתאים

$$L_0 \in I \to G_{L_0} = \mathrm{Gal}\left(L_0/K\right)$$

$4 \Leftarrow 3$: חיתוך של סגורות היא סגורה.

$1 \Rightarrow 4$: נכתוב

$$G \leq \prod_{i \in I} G_i$$

כעת יספיק לנו לבנות הרחבת גלואה שבה החבורה הימנית היא חבורת גלואה שלה - כי אם $\mathrm{Gal}\left({}^{M}\!/_{K}\right) \cong \prod_i G_i$ אז $L := M^G$ יקיים $\mathrm{Gal}\left({}^{L}\!/_{K}\right)$ (אפילו יש שקילות בין זה לבין הסגירות של G במכפלה - נראה בשיעור הבא את התאמת גלואה לחבורות אינסופיות). את G_i מימשנו על ידי הוספת משתנים $X_1^{(i)}, \ldots, x_{r_i}^{(i)}$. נבחר קבוצת משתנים זרה עבור כל i, ונקבל שדות מופרדים לינארית - כלומר נקבל מכפלה ישרה. ■

תרגיל האם $\mathbb{Z}$ היא חבורת גלואה?

תרגיל הראו כי כל חבורת גלואה אינסופית אינה בת־מניה.

פתרון ניקח הרחבה של שדות $K \subseteq L$. ניקח סדרה של תת הרחבות סופיות וגלואה (ממעלה לפחות 1): $K \subseteq L_0 \subseteq L_1 \subseteq \cdots \subseteq L$. כל איבר בתוך $\mathrm{Gal}\left({}^{L_i}\!/_{K}\right)$ אפשר להרים אל $\mathrm{Gal}\left({}^{L_{i+1}}\!/_{K}\right)$ בשתי דרכים שונות לפחות. בגלל שאפשר לחזור על התהליך $\aleph_0$ פעמים, נקבל

$$|G| \geq 2^{\aleph_0} = \aleph$$

דוגמא ניקח $\mathbb{F}_2 \subseteq \mathbb{F}_{2^p} \subseteq \mathbb{F}_{2^{p^2}} \subseteq \cdots \subseteq \mathbb{F}_{2,p} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathbb{F}_{2^{p^i}}$, כאשר p ראשוני. חבורות גלואה כאן הן ${}^{\mathbb{Z}}\!/_{p^n\mathbb{Z}}$, ולכן

$$\mathrm{Gal}\left({}^{\mathbb{F}_{2,p}}\!/_{\mathbb{F}_2}\right) = \varprojlim {}^{\mathbb{Z}}\!/_{p^n\mathbb{Z}} \cong (\mathbb{Z}_p, +)$$

נצליב את כל המידע מכל הראשוניים, כדי לחשב את $\mathrm{Gal}\left({}^{\overline{\mathbb{F}_2}}\!/_{\mathbb{F}_2}\right)$ - כל השרשראות האלה מופרדות לינארית, ולכן

$$\mathrm{Gal}\left({}^{\overline{\mathbb{F}_2}}\!/_{\mathbb{F}_2}\right) = \prod_p \mathbb{Z}_p =: \hat{\mathbb{Z}}$$

זה כמובן עובד גם לכל $\mathbb{F}_p$.