

אלגברה ב2

© ארזים

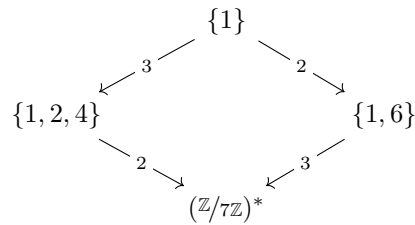
16 במאי 2017

נראה דוגמה לכל מיני דברים שלמדנו. נתבונן בהרחבה $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$, כאשר $\zeta = \zeta_7 = e^{\frac{2\pi i}{7}}$. הפולינום המינימלי מעל \mathbb{Q} הוא

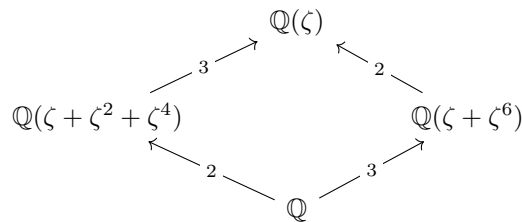
$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

ולכן המעלה של ההרחבה היא 6. חבורת גלואה היא $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^* = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. האיזומורפיזם האחרון מתקבל על ידי בחירת יוצר, למשל 5. נסמן את השיכונים $\{\sigma_i\}$, כאשר $\sigma_i(\zeta) = \zeta^i$.

נתבונן בסריג תתי החבורות של חבורת גלואה:



בעזרת התאמת גלואה, נתאים בין תתי חבורה H לשדה $\mathbb{Q}(\zeta)^H$. סריג תתי ההרחבות הוא:



ראשית נוכיח שההרחבה שמצאנו מסדר 3 נכונה. ברור שהאיבר $\zeta + \zeta^6$ מקובע על ידי $\{1, 6\}$. כדי להראות שהוא יוצר את ההרחבה המתאימה לחבורה זו, מספיק להראות $\zeta + \zeta^6 \notin \mathbb{Q}$ כי אחרת המעלה שלו מחלקת את 3, כי $\mathbb{Q}(\zeta + \zeta^6)$ חלקית להרחבה מסדר 3. ינבע שהסדר הוא 3. אם $\zeta + \zeta^6 \in \mathbb{Q}$, נחסר אותו מהמספר $\zeta^6 + \zeta^5 + \zeta^4 + \zeta^3 + \zeta^2 + \zeta + 1 \in \mathbb{Q}$ נחסר אותו מהמספר $\zeta + \zeta^6 \in \mathbb{Q}$. ולקבל פולינום ממעלה 5 שאותו ζ מאפס מעל \mathbb{Q} - בסתירה לכך שהמעלה שלו 6. לכן סיימנו.

עבור ההרחבה השנייה, שוב ברור שהאיבר שבחרנו מקובע על ידי החבורה $\{1, 2, 4\}$. האיבר הזה אינו רציונלי, כי המעלה של ζ היא 6, ולכן נובע שהמעלה של ההרחבה שהוא יוצר היא לפחות 2 - אבל זו תת הרחבה של הרחבה מסדר 2 (ההרחבה שמתאימה לחבורה) ולכן הוא יוצר את ההרחבה. במצב זה כתבנו גם

$$S_6 \geq \text{Gal}(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \cong (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*$$

בתוך S_6 נמצא את החבורה הזו בתור $\langle (1, 2, 3, 4, 5, 6) \rangle$ - החבורה הציקלית מסדר 6 בתוך S_6 .

משפט 0.1 הרחבת שדות סופית L/K היא פשוטה אם ורק אם יש רק מספר סופי של שדות ביניים $K \subseteq R \subseteq L$.

הוכחה: נניח כי $L = K(\alpha)$. לכל $K \subseteq R \subseteq L$ נתאים את הפולינום האופייני של α מעל R . ברור כי $\text{irr}(\alpha, R) \mid \text{irr}(\alpha, K)$, ולכן בתמונה של ההתאמה שלנו בין הרחבות לפולינומים יש רק מספר סופי של איברים.

נותר להראות שההעתקה שלנו חד-חד-ערכית. נגדיר את R_0 להיות השדה שנוצר על ידי K והמקדמים של $\text{irr}(\alpha, R)$. נרצה להראות $R = R_0$. אנחנו יודעים שמתקיים $[L : R] = \deg \text{irr}(\alpha, R)$. כמו כן, ברור כי $\text{irr}(\alpha, R) \in R_0[x]$, כי ככה R_0 הוגדר. אם כן, $[L : R_0] = \deg \text{irr}(\alpha, R_0) \leq \deg \text{irr}(\alpha, R)$ ואז

$$\deg \text{irr}(\alpha, R) \geq [L : R_0] = [L : R][R : R_0] = \deg \text{irr}(\alpha, R)[R : R_0]$$

קיבלנו

$$[R : R_0] \leq 1$$

ולכן $R = R_0$.

בכיוון השני, נניח שיש מספר סופי של שדות ביניים. אם השדה K סופי, הטענה ברורה, ולכן נניח כי K אינסופי. נרצה למצוא איבר שיוצר את ההרחבה. די למצוא $\alpha \in L$ שלא נמצא באף שדה ביניים $K \subseteq R \subsetneq L$. באופן שקול, די להראות כי איחוד כל אותם שדות ביניים (המוכלים ממש בתוך L) אינו L , אלא מוכל ממש בו. זה נובע מלמה כללית:

למה 0.2 יהי V מרחב ווקטורי מעד שדה אינסופי F , ויהיו $V_1, \dots, V_n \subsetneq V$. אזי

$$\bigcup_{i=1}^n V_i \subsetneq V$$

הוכחה: נניח כי האיחוד הוא מינימלי (כלומר אין איברים מיותרים). בשלילה, נניח שהוא שווה לכל המרחב V . קיים $x \in V_1$ כך שלכל $i \neq 1$ מתקיים $x \notin V_i$. בנוסף, קיים $y \notin V_1$. נתבונן באיברים מהצורה $x + \alpha y$, כאשר $\alpha \in F^*$. סקלר הפיך. ברור כי $x + \alpha y \notin V_1$, ומהאינסופיות F נקבל שקיים i וקיימים $\alpha_1 \neq \alpha_2$ עבורם

$$x + \alpha_1 y, x + \alpha_2 y \in V_i$$

נחסר ביניהם ונקבל

$$(\alpha_1 - \alpha_2)y \in V_i$$

■ ומכאן $y \in V_i$. מכאן נקבל כי $x \in V_i$, וזו סתירה.

■

מסקנה 0.3 (משפט האיבר הפרימיטיבי) אם L/K פרידה אזי היא פשוטה.

הוכחה: ניקח הרחבה סופית N/L כך שהרחבה N/K גלואה. שדות ביניים של N/K מתאימים לתת חבורות של $\text{Gal}(N/K)$, שהיא סופית - לכן יש מספר סופי של שדות ביניים בין N, K , ובפרט בין L, K . לכן נובע מהמשפט הקודם שהרחבה פשוטה.

■

טענה 0.4 ההרחבה $\mathbb{F}_p(\sqrt[p]{x}, \sqrt[p]{y})/\mathbb{F}_p(x, y)$ אינה פשוטה.

הוכחה: נשים לב שמעלת ההרחבה היא p^2 , אבל לכל $a \in \mathbb{F}_p(\sqrt[p]{x}, \sqrt[p]{y})$ מתקיים $a^p \in \mathbb{F}_p(x, y)$ - כי העלאה בחזקת p זה הומומורפיזם, והטענה נכונה למשתנים $\sqrt[p]{x}, \sqrt[p]{y}$. לכן, אם היה המקיים $w \in \mathbb{F}_p(\sqrt[p]{x}, \sqrt[p]{y}) = \mathbb{F}_p(x, y)$ אזי מעלת ההרחבה הייתה לכל היותר p , בסתירה.

■