

השלמות על תמורות (מהרצאה 3)

תזכורת: חבורת התמורות על $X = \{1, 2, \dots, n\}$ נקראת התמורה הסימטרית S_n .

הגדרה: מחזור (חישוקון, *cyclus*) מאורך k זו תמורה המסומנת $\pi = (a_1 a_2 \dots a_k)$, כאשר

$$\pi(a_1) = a_2, \pi(a_2) = a_3, \dots, \pi(a_k) = a_1, \text{ ומקיימת } a_1, a_2, \dots, a_k \in X$$

$$\text{ולכל } a \in X, a_1, a_2, \dots, a_k \neq a \text{ מתקיים } \pi(a) = a.$$

הגדרה: חילוף (היפוך, חישוקון, *transposition*) הוא מחזור מאורך 2. למשל (1,4) זהו חילוף ב-

$$S_5.$$

למה: כל $\sigma \in S_n$ ניתן להצגה כמכפלה $\sigma = \pi_1 \pi_2 \dots \pi_r$ של מחזורים זרים מאורך גדול מ-1. הצגה זו יחידה עד כדי סדר המחזורים.

הוכחה:

קינם: $\langle \sigma \rangle$ פועלת על $X = \{1, \dots, n\}$. יהיו X_1, \dots, X_r המסלולים מאורך גדול מ-1 של $\langle \sigma \rangle$ ונסמן

$$X_i = \{x_i, \sigma(x_i), \sigma^2(x_i), \dots, \sigma^{k_i-1}(x_i)\} \text{ ולכן מתקיים } x_i \in X_i, \text{ נבחר } k_i \text{ מאורך } X_i,$$

$$\sigma^{k_i}(x_i) = x_i. \text{ יהי } \pi_i = (x_i \sigma(x_i) \sigma^2(x_i) \dots \sigma^{k_i-1}(x_i)) \text{ נראה } \sigma = \pi_1 \pi_2 \dots \pi_r. \text{ יהי איבר } x \in X.$$

אם $x \in X_i$ עבור i כלשהו, אזי $x = \sigma^k(x_i)$ עבור k כלשהו, ואז:

$$\pi_1 \pi_2 \dots \pi_r(x) = \pi_i(x) = \pi_i(\sigma^k(x_i)) = \sigma^{k+1}(x_i) = \sigma(\sigma^k(x_i)) = \sigma(x)$$

אם $x \notin X_i$ לכל i , אזי x הוא איבר במסלול באורך 1, ולכן זר ל- $\pi_1 \pi_2 \dots \pi_r$, כלומר

$$\sigma(x) = x, \pi_1 \pi_2 \dots \pi_r(x) = x$$

ולכן מתקיים שיוויון.

יחידות: נניח כי $\sigma = p_1 p_2 \dots p_m$ כאשר $p_i = (a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_{m_i}})$ מחזור מאורך $m_i > 1$

p_1, \dots, p_m זרים. אז:

$$\sigma(a_{i_1}) = p_1 p_2 \dots p_m(a_{i_1}) = p_i(a_{i_1}) = a_{i_2}$$

$$\sigma^2(a_{i_1}) = \sigma(p_1 p_2 \dots p_m(a_{i_1})) = \sigma(a_{i_2}) = p_1 p_2 \dots p_m(a_{i_2}) = p_i(a_{i_2}) = a_{i_3}$$

\vdots

$$\sigma(a_{i_{m_i-1}}) = a_{i_{m_i}}$$

$$\sigma(a_{i_{m_i}}) = a_{i_1}$$

לכן $X'_i = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{m_i}}\} = \{\sigma^j(a_{i_1}) \mid j \geq 0\}$ הוא מסלול של $\langle \sigma \rangle$ מאורך m_i . המסלולים

X'_1, X'_2, \dots, X'_m זרים (כי p_1, \dots, p_m זרים), והם כל מסלולי $\langle \sigma \rangle$ מאורך גדול מ-1: אם

לכן $\langle \sigma \rangle$. לכן $\{x\}$ מסלול מאורך 1 של $\langle \sigma \rangle$. לכן $x \in X \setminus \bigcup_{i=1}^m X'_i$ אז $p_i(x) = x$ לכל i , לכן $\sigma(x) = x$, לכן $\{x\}$ מסלול מאורך 1 של $\langle \sigma \rangle$.

$$\square . X'_i = X_i \text{ ובה"כ } m = r$$

טענה: כל תמורה ניתנת להצגה כמכפלה של חילופים (לאו דווקא יחידה).

הוכחה: לאור הלמה, מספיק להראות עבור מחזורים. ואכן:

$$\square \pi = (a_1 a_2 \dots a_n) = (a_1 a_2)(a_1 a_3) \dots (a_1 a_n)$$

הגדרה: אם $\sigma \in S_n$, σ היא מכפלה של k חילופים, אזי נסמן $\text{sgn}(\sigma) := (-1)^k$ זוגיות מספר החילופים של σ .

משפט: אם $\sigma = p_1 p_2 \dots p_m = \pi_1 \pi_2 \dots \pi_l$ כאשר p_i, π_i חילופים, אזי $l \equiv m \pmod{2}$ (כלומר, זוגיות התמורה מוגדרת היטב).

הוכחה: $\sigma \sigma^{-1} = p_1 p_2 \dots p_m \cdot \pi_l \pi_{l-1} \dots \pi_2 \pi_1 = (e)$, לכן מספיק להראות שפרמוטציית הזוהות בעלת זוגיות חיובית, שכן אז $m + l \equiv 0 \pmod{2}$, ולכן $l \equiv m \pmod{2}$.

נניח $(e) = (a_1 b_1)(a_2 b_2) \dots (a_k b_k)$, כאשר $a_i \neq b_i$ לכל i , $k \geq 1$. נראה ש- k זוגי באינדוקציה.

אם $k = 1$ אז המכפלה בצד שמאל אינה הזוהות. $k = 2$ ייתכן. נניח $k \geq 3$, ונניח נכונות לכל $i < k$. עבור $i = 2, 3, \dots, k$, אחד מהחילופים צריך להזיז את a_1 , אחרת המכפלה בצד שמאל לא הייתה פרמוטציית הזוהות. לכן, בה"כ, קיים i עבורו $a_i = a_1$ (נבחר את ה- i המינימלי). בעזרת הנוסחאות:

$$(cd)(ab) = (ab)(cd), (bc)(ab) = (ac)(bc)$$

ניתן להניח ש- $a_2 = a_1$, שכן אם במכפלת שתי תמורות הגורם השני מזיז את a והראשון לא, ניתן להחליפם במכפלה שקולה בה הגורם הראשון מזיז את a והשני לא (ואז מזיזים את a_i עד a_2).

אם $b_1 = b_2$, אזי $(e) = (a_1 b_1)(a_2 b_2)$, לכן ניתן להורידם מן המכפלה, ונשאר עם $k - 2$ חילופים, ומהנחת האינדוקציה k זוגי. אחרת, אם $b_1 \neq b_2$, אזי $(a_1 b_1)(a_1 b_2) = (a_1 b_2)(b_1 b_2)$, ואז

$(e) = (a_1 b_2)(b_1 b_2)(a_3 b_3) \dots (a_k b_k)$. נחפש שוב i מינימלי עבורו $a_i = a_1$ (קיים כזה, אחרת זו לא הייתה תמורת הזוהות). נחזור על התהליך, ואז או שנוכל לרשום את המכפלה כמכפלה של $k - 2$ חילופים, או שנוריד את מספר החילופים המזיזים את a_1 ב-1. אולם, מספר החילופים שמזיזים את a_1 הוא לכל הפחות 2, לכן התהליך סופי ונוכל לרשום את המכפלה כמכפלת $k - 2$ חילופים. \square

טענה: $\text{sgn} : S_n \rightarrow \{-1, 1\}$ הוא הומומורפיזם.

הוכחה: אם δ_1 מכפלה של n חילופים ו- δ_2 מכפלה של m חילופים, אזי $\delta_1 \delta_2$ מכפלה של $m + n$ חילופים, כלומר $\text{sgn}(\delta_1 \delta_2) = (-1)^{m+n} = (-1)^n \cdot (-1)^m = \text{sgn}(\delta_1) \cdot \text{sgn}(\delta_2)$. \square

מסקנה: אוסף התמורות הזוגיות (=בעלות סימן 1) הוא תת חבורה נורמלית ב- S_n , שנסמנה A_n (*Alternating*).

הוכחה:

$$\ker(\text{sgn}) = \{\sigma \in S_n \mid \text{sgn}(\sigma) = 1\} = A_n$$

ולכן $A_n \triangleleft S_n$. \square

טענה: חצי מן התמורות ב- S_n זוגיות.

הוכחה: ניקח חילוף כלשהו τ ב- S_n . נסמן ב- B את אוסף התמורות האי-זוגיות. נגדיר העתקה

$$f: A_n \rightarrow B \text{ עי"י } f(\sigma) = \tau\sigma \text{ . זו ההעתקה הפיכה, כי } f^{-1}(\sigma) = \tau^{-1}\sigma \text{ , ולכן } |A_n| = |B| \text{ . } \square$$

$$\text{מסקנה: } [S_n : A_n] = 2 \text{ .}$$

$$\text{תרגיל: } S_n/A_n \cong \{\pm 1\} \text{ .}$$

הוכחה: ההעתקה $\text{sgn}: S_n \rightarrow \{\pm 1\}$ היא הומומורפיזם ועל. מתקיים $\ker(\text{sgn}) = A_n$. לכן, לפי

$$\text{משפט ההומומורפיזם, מתקיים } S_n/A_n \cong \{\pm 1\} \text{ .}$$