מבוא למרחבי הילברט ותורת האופרטורים

© ארזים

20 בנובמבר 2016

1 תזכורת

טענה 1.1 המכפלה הפנימית $\langle\cdot,\cdot\rangle$ היא פונקציה רציפה מהמרחב $E\times E$.

הוכחה: יהי $x_n\to x, y_n\to y$, ונרצה להראות כי $\langle x_n,y_n\rangle\to\langle x,y\rangle$. $x_n\to x$, ולכן x_n חסומה, כלומר קיים C_1 כך שלכל n מתקיים $||x_n||\le C_1$ (שכן $||x_n-x||\to 0$, ולכן חסומה, ואז $||x_n||\le||x||+||x_n-x||$). גם y_n חסומה, מאותה סיבה, ובסך הכל קיים $0<C<\infty$ כך שלכל n מתקיים

$$||x_n||\,,||y_n||\le C$$

כעת,

$$\begin{aligned}|\langle x,y\rangle-\langle x_n,y_n\rangle| &\le |\langle x,y\rangle-\langle x_n,y\rangle|+|\langle x_n,y\rangle-\langle x_n,y_n\rangle|=|\langle x-x_n,y\rangle|+|\langle x_n,y-y_n\rangle|\le\\ &\le ||x-x_n||\,||y||+||x_n||\,||y-y_n||\to 0+0=0\end{aligned}$$

■

בשיעור שעבר ראינו את הגדרת האורתוגונליות ואורתונורמליות, דנו בקירוב של x על ידי הטלה למערכת אורתוגונלית, וראינו את אי שוויון בסל: אם $\{e_n\}$ סדרה אורתונורמלית אזי לכל $x\in E$ מתקיים

$$\sum_{i=1}^{n}|\langle x,e_k\rangle|^2\le||x||^2$$

לאחר מכן ראינו משפט חשוב, שאמר שהתנאים הבאים שקולים כאשר $\{e_n\}$ אורתונורמלית:

1. $x\in\overline{\operatorname{span}\{e_n\}_{n=1}^{\infty}}$.
2. $x=\sum_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle e_k$
3. $||x||^2=\sum_{k=1}^{\infty}|\langle x,e_k\rangle|^2$

2 מרחבי הילברט

הגדרה 2.1 יהי X מרחב נורמי, ותהי $\{x_n\} \subseteq X$ סדרה. הסדרה נקראת סדרת קושי אם מתקיים

$$\lim_{n,m\to\infty} ||x_n - x_m|| = 0$$

תכונות

1. אם $x_n \to x$ אזי $\{x_n\}$ סדרת קושי.
2. אם $\{x_n\}$ סדרת קושי אזי היא חסומה.

הגדרה 2.2 מרחב נורמי X נקרא מרחב שלם (או מרחב בנך) אם לכל סדרת קושי יש גבול במרחב.
מרחב מכפלה פנימית שלם נקרא מרחב הילברט.

דוגמאות

1. המרחב $C\left[a,b\right]$ הוא מרחב בנך. נניח כי $\{f_n\}$ סדרת קושי, כלומר

$$\max_{t\in[a,b]} \left|f_n\left(t\right) - f_m\left(t\right)\right| \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$$

לכל $t \in [a,b]$ קבוע, $f_n\left(t\right)$ היא סדרת קושי של מספרים, כלומר מתכנסת. נגדיר

$$g\left(t\right) = \lim_{n\to\infty} f_n\left(t\right)$$

כעת, מתנאי קושי להתכנסות במידה שווה, f_n מתכנסת במידה שווה אל g, מה שאומר שזה מתכנס גם בנורמה, וידוע כי גבול במידה שווה של פונקציות רציפות הוא רציף, ולכן $g \in C\left[a,b\right]$, $f_n \to g$ כנדרש.

2. המרחב l_p, עבור $1 \le p < \infty$ הוא שלם. נניח כי $\{X^n\}$ סדרת קושי, כאשר $X^n = (X_1^n, \ldots, X_k^n)$. ברור כי לכל $z \in l_p$ מתקיים $|z_j| \le ||z||$ לכל j. לכן, לכל j, מתקיים

$$\left|X_j^n - X_j^m\right| \le ||X^n - X^m|| \to 0$$

לכן לכל j הסדרה $\left\{X_j^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי של מספרים, כלומר יש גבול $a_j = \lim X_j^n$.
כעת, X^n קושי, ולכן חסומה, כלומר קיים $0 < C < \infty$ כך שלכל n מתקיים $||X^n|| \le C$. כעת, לכל N מתקיים

$$\sum_{j=1}^{N} |a_j|^p = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \left|X_j^n\right|^p \le C^p$$

ואז נקבל כי $\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|^p$ מתכנס, כלומר $a=(a_1,\ldots,a_n)\in l_p$. נראה כי $X^n\to a$.
יהי $\varepsilon>0$. X^n קושי, ולכן קיים M כל שלכל $m,n>M$ מתקיים

$$||X^n-X^m||<\varepsilon$$

לכל N מתקיים

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N}\left|X_j^n-a_j\right|^p &= \sum_{j=1}^{N}\left|X_j^n-\lim X_j^m\right|^p=\lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{N}\left|X_j^n-X_j^m\right|^p\le \\ &\le \overline{\lim_{M<m\to\infty}}\sum_{j=1}^{\infty}\left|X_j^n-X_j^m\right|\le\varepsilon^p\end{aligned}$$

וכעת לכל $n<M$ מתקיים

$$||X^n-a||_p^p=\sum_{j=1}^{\infty}\left|X_j^n-a_j\right|\le\varepsilon^p$$

ולכן l_p מרחב שלם. עבור $p=2$, מקבלים מרחב הילברט, על ידי

$$\langle x,y\rangle=\sum_{j=1}^{\infty}x_j\overline{y_j}$$

3. המרחב $C_{(p)}\left[-1,1\right]$ אינו מרחב בנך. נראה דוגמא:

$$f_n\left(t\right)=\begin{cases}1 & t\ge\frac{1}{n}\\ -1 & t\le-\frac{1}{n}\\ nt & -\frac{1}{n}<t<\frac{1}{n}\end{cases}$$

זו סדרת קושי, והיא שואפת לפונקציה הגבולית

$$f\left(t\right)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t=0\\ -1 & t<0\end{cases}$$

(הפונקציה לא רציפה, אבל אפשר להרחיב מעט את המרחב לפונקציות אינטגרביליות רימן). כעת,

$$\int_{-1}^{1}\left|f_n\left(t\right)-f\left(t\right)\right|^p\,\mathrm{d}t\le\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}2^p\,\mathrm{d}t=\frac{2^{p+1}}{n}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

אז $\{f_n\}$ סדרת קושי בתוך $R_p\left[-1,1\right]$, אבל $C_p\left[-1,1\right]\subseteq R_p\left[-1,1\right]$, ולכן הן קושי גם בתוך $C_p\left[-1,1\right]$. נניח שקיים $g\in C_p\left[-1,1\right]$ כך שמתקיים $||f_n-g||\to 0$, ואז מתקיים

$$\int_0^1 \left|f_n\left(t\right)-g\left(t\right)\right|^p \, \mathrm{d}t\to 0$$

כמוכן, ראינו כבר כי זה מתקיים עבור f. נובע כי

$$\int_0^1 \left|f\left(t\right)-g\left(t\right)\right| \, \mathrm{d}t=0$$

לכן נובע כי $f\left(t\right)=g\left(t\right)$ לכל $t\in\left(0,1\right]$. באותה צורה מקבלים $f\left(t\right)=g\left(t\right)$ לכל $t\in\left[-1,0\right)$, אבל זו סתירה, כי אז g לא רציפה.

טענה 2.3 אם המרחב X הוא מרחב בנך, והמרחב $X\subseteq Y$ הוא תת מרחב סגור, אזי Y הוא מרחב בנך.

הוכחה: תהי $\{y_n\}\subseteq Y$ סדרת קושי. לכן היא גם סדרת קושי בתוך X, שהוא מרחב בנך, ולכן היא מתכנסת לגבול $y\in X$. אבל Y תת מרחב סגור, ולכן $y\in Y$, והוכחנו כי Y מרחב בנך. ■

משפט 2.4 יהי X מרחב נורמי. אזי קיימים מרחבים $Y\supseteq\hat{X}$ כך שהמרחב $\hat{X}$ הוא מרחב בנך, המרחב Y איזומטרי למרחב X, וכן Y צפוף בתוך $\hat{X}$, כלומר $\overline{Y}=\hat{X}$.

הוכחה: ראשית נגדיר מרחב גדול - $\overline{X}$, שהאיברים בו הם סדרות קושי של איברי X. עליו נגדיר חצי נורמה:

$$p\left(x\right)=\lim||x_n||$$

כעת $\overline{X}$ הוא שם ביחס לחצי נורמה p. נגדיר $\hat{X}=\overline{X}/\ker p$. כמו כן, ההעתקה $T:X\to\hat{X}$ על ידי $Tx=\left(x,\ldots,x,\ldots\right)$ היא איזומטריה בין X לתת מרחב של $\hat{X}$. ■

משפט 2.5 נניח כי H מרחב הילברט, וכי $\{e_n\}\subseteq H$ אורתונורמלית. אזי לכל $\left(a_n\right)\in l_2$ הטור $\sum a_ne_n$ מתכנס, ובפרט לכל $x\in H$ יש התכנסות של הטור $\sum\left\langle x,e_n\right\rangle e_n$.

הוכחה: נגדיר לכל m את הווקטור

$$s_m=\sum_{n=1}^m a_ne_n$$

נוכיח כי זו סדרת קושי, ולכן היא תתכנס.

$$||s_m - s_k||^2 = \left|\left|\sum_{n=k+1}^{m} a_n e_n\right|\right|^2 = \sum_{n=k+1}^{m} |a_n|^2 \to 0$$

וזאת מתוך קריטריון קושי להתכנסות של טורים. H מרחב הילברט, לכן סדרת קושי מתכנסת, וסיימנו.

בפרט, מאי שוויון בסל מתקיים $\sum |\langle x, e_n\rangle|^2 < \infty$, ולכן הטור $\sum \langle x, e_n\rangle e_n$ מתכנס.■

מסקנה 2.6 אם H מרחב הילברט, $\{e_n\}$ אורתונורמלית, אזי ההעתקה

$$\begin{aligned} T : X &\to l_2 \\ Tx &= (\langle x, e_n\rangle) \end{aligned}$$

היא על.

הוכחה: נניח כי $a = (a_n) \in l_2$. נגדיר

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$$

ואז נקבל כי

$$\langle x, e_k\rangle = \left\langle \sum a_n e_n, e_k \right\rangle = \sum a_n \langle e_n, e_k\rangle = a_k$$

ולכן $Tx = a$. ■

מסקנה 2.7 אם H מרחב הילברט, $\{e_n\}$ אורתונורמלית עם $E = \overline{\operatorname{span}\{e_n\}}$, אזי

$$x \to Px = \sum \langle x, e_k\rangle e_k$$

היא הטלה אורתוגונלית על E, כלומר לכל $x \in E$ מתקיים $Px = x$, ולכן $y \in H$ מתקיים $Py \in E, y - Py \perp E$.

הוכחה: בשיעור הקודם ראינו כי $Px = x$ במצב הזה. עבור $y \in H$ מתקיים $Py \in E$ שכן

$$Py = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \langle y, e_k\rangle e_k$$

כעת נותר להראות כי $y - Py \perp e_k$ לכל k. נקבל

$$\langle y - Py, e_k\rangle = \langle y, e_k\rangle - \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, e_n\rangle \langle e_n, e_k\rangle = 0$$

ולכן סיימנו. ■

הגדרה 2.8 יהי X מרחב נורמי. סדרה $\{x_n\}$ תקרא שלמה אם מתקיים $X = \overline{\mathrm{span}\{x_n\}}$.

מסקנה 2.9 יהי E מרחב מכפלה פנימית, ותהי $\{e_n\}$ סדרה אורתונורמלית שלמה. אזי ההעתקה $Tx = (\langle x, e_n\rangle) \in l_2$ היא איזומטריה לינארית על $\mathrm{Im}T$.
אם E מרחב הילברט, אז T היא איזומטריה על l_2.

מסקנה 2.10 במקרה זה $\overline{\mathrm{Im}T} \subseteq l_2$ היא השלמה של המרחב E.

טענה 2.11 (האורתוגונליזציה של גרם־שמידט) יהי E מרחב מכפלה פנימית, ונניח כי $\{x_n\}$ סדרת ווקטורים בלתי תלויים לינארית, ונגדיר $E_k = \mathrm{span}\{x_1, \ldots, x_k\}$. אזי קיימת סדרה אורתונורמלית $\{e_n\}$ כך שמתקיים $E_k = \mathrm{span}(e_n)_{n=1}^{k}$ לכל k. בפרט, אם $\{x_n\}$ סדרה שלמה, גם $\{e_n\}$ סדרה שלמה.

הוכחה: נגדיר $e_1 = \frac{x_1}{||x_1||}$. נמשיך על ידי

$$\begin{aligned} y_2 &= x_2 - \langle x_2, e_1\rangle e_1 \\ e_2 &= \frac{y_2}{||y_2||} \end{aligned}$$

כך ניתן להמשיך באינדוקציה על ידי

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle x_{k+1}, e_i\rangle e_i \\ e_{k+1} &= \frac{y_{k+1}}{||y_{k+1}||} \end{aligned}$$

■

הגדרה 2.12 מרחב נורמי X ייקרא ספרבילי אם קיימת סדרה $\{x_n\} \subseteq X$ המקיימת $\overline{(x_n)} = X$ (קיימת קבוצה צפופה בת מניה).

מסקנה 2.13 בכל מרחב מכפלה פנימית ספרבילי קיימת סדרה שלמה.

הוכחה: נגדיר סדרה חדשה.

$$\begin{aligned} y_1 &= x_{\min\{j | x_j \neq 0\}} \\ y_2 &= x_{\min\{j | x_j \notin \mathrm{span}\{y_1\}\}} \\ &\vdots \\ y_{n+1} &= x_{\min\left\{j | x_j \notin \mathrm{span}\{y_k\}_{k=1}^{n}\right\}} \\ &\vdots \end{aligned}$$

ברור מהבניה כי $\{y_n\}$ בלתי תלוייה לינארית. נשים לב שמתקיים

$$\mathrm{span}\{y_k\}_{k=1}^{n} \supseteq \mathrm{span}\{x_k\}_{k=1}^{n}$$

נוכל לבנות מתוך $\{y_n\}$ סדרה אורתונורמלית לפי גרם־שמידט, והיא שלמה בגלל שהקבוצה $\{x_n\}$ צפופה. ■

מסקנה 2.14 כל מרחב הילברט ספרבילי איזומטרי למרחב l_2.