מבוא למרחבי הילברט ותורת האופרטורים

© ארזים

21 בנובמבר 2016

תרגיל

$$\lambda_n \coloneqq \min_{a\in\mathbb{C}} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\sqrt{|\cos x|} - \alpha\cos(nx)\right|^2 \mathrm{d}x$$

חשבו

$$L = \lim_{n\to\infty} \lambda_n$$

פתרון נתבונן בפונקציה

$$f(x) \in \sqrt{|\cos x|} \in \mathrm{R}(\mathbb{T})$$

נסמן גם

$$W_n = \operatorname{span}(\cos(nx))$$

ונסמן בתור P_n את ההטלה האורתוגונלית על W_n.

$$\lambda_n = \min_{\alpha\in\mathbb{C}} \left(||f(x) - \alpha\cos(nx)||^2\right) = ||f(x) - P_n(f)||^2$$

מתקיים כמובן

$$P_n(f) = \frac{\langle f, \cos(nx)\rangle}{||\cos(nx)||^2}\cos(nx)$$

משפט פיתגורס נובע:

$$\lambda_n = ||f - P_n f||^2 = ||f||^2 - ||P_n f||^2 = 4 - ||P_n f||^2$$

קל לבודק כי $||f||^2 = 4$. כמו כן ניזכר כי $\{\cos nx\}_{n=1}^{\infty}$ היא מערכת אורתוגונלית, וכן $||\cos nx||^2 = \pi$. לכן

$$L = \lim_{n\to\infty} \lambda_n = 4 - \frac{1}{\pi} \lim_{n\to\infty} |\langle f, \cos nx\rangle|^2 = 4$$

הגבול האחרון שווה 0 בגלל הלמה של רימן ולבג.

הגדרה 0.1 מרחב הילברט היא מרחב מכלה פנימית שלם (כל סדרת קושי מתכנסת).

תרגיל יהי H מרחב הילברט, ויהי $E \subseteq H$ תת מרחב. הוכיחו כי

$$E^{\perp^\perp} = \overline{E}$$

פתרון יהי $x \in \overline{E}$, ויהי $y \in E^{\perp}$. תהי $\{x_n\} \subseteq E$ כך שמתקיים $x_n \to x$. מרציפות המכפלה הפנימית נובע כי

$$0 = \langle x_n, y\rangle \to (x, y)$$

ולכן $y \perp x$. קיבלנו כי $\overline{E} \subseteq E^{\perp^\perp}$. כעת יהי $x \in E^{\perp^\perp}$. מתכונות של הטלה אורתוגונלית קיימים ויחידים $y \in \overline{E}, z \in E^{\perp}$ כך שמתקיים $x = y + z$. כעת מהחלק הראשון מתקיים $y \in E^{\perp^\perp}$, ולכן $z = x - y \in E^{\perp^\perp}$. בסך הכל $z \in E^{\perp} \cap E^{\perp^\perp}$, ולכן $z = 0$ - כלומר $x \in \overline{E}$. הוכחנו את ההכלה השנייה, וקיבלנו את השוויון הדרוש.

תרגיל יהי L, M תתי מרחבים של מרחב הילברט H. הוכיחו כי

$$(L + M)^{\perp} = L^{\perp} \cap M^{\perp}$$

פתרון אם $A \subseteq B$ מתקיים $B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$. כמובן, $L, M \subseteq L + M$, ולכן

$$(L + M)^{\perp} \subseteq L^{\perp} \cap M^{\perp}$$

כעת, יהי $x \in L^{\perp} \cap M^{\perp}$. יהי $y \in L + M$. נכתוב $y = y_l + y_m$, כאשר $y_l \in L$, $y_m \in M$. כעת מתקיים

$$x \perp y_l, y_m \Rightarrow x \perp y$$

ולכן סיימנו.

תרגיל יהיו L, M תתי מרחבים סגורים של מרחב הילברט H. הוכיחו כי:

$$(L \cap M)^{\perp} = \overline{L^{\perp} + M^{\perp}}$$

פתרון מהתרגילים הקודמים

$$\begin{aligned}\left(L^{\perp}+M^{\perp}\right)^{\perp} &= L^{\perp^{\perp}}\cap M^{\perp^{\perp}}=\overline{L}\cap\overline{M}=L\cap M\\ \overline{\left(L^{\perp}+M^{\perp}\right)} &= \left(L\cap M\right)^{\perp}\end{aligned}$$

הגדרה 0.2 יהי H מרחב הילברט. מערכת $\left\{x_\alpha\right\}_{\alpha\in A}$ נקראת שלמה אם $H=\overline{\operatorname{span}\left\{x_\alpha\right\}_{\alpha\in A}}$.

דוגמאות

1. המערכת $\left\{t^n\right\}_{n=0}^{\infty}$ שלמה במרחב $C\left([0,1]\right)$, כפי שראינו בחדו"א 2.
2. $\left\{e^{inx}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $\left\{1,\cos\left(nx\right),\sin\left(nx\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ שתיהן שלמות במרחב $R\left(\mathbb{T}\right)=L^2\left([-\pi,\pi]\right)$.

תרגיל מצאו את

$$\overline{\operatorname{span}\left\{e_n\right\}}\subseteq l^2$$

כאשר

$$\begin{aligned}e_1 &= (1,2,0,\dots)\\ e_2 &= (0,1,2,0,\dots)\\ &\vdots\end{aligned}$$

פתרון יהי $x\in l^2$ כך שמתקיים $x\perp e_n$ לכל n.

$$\begin{aligned}x &\perp e_1\Rightarrow x_1+2x_2=0\\ x &\perp e_2\Rightarrow x_2+2x_3=0\\ &\vdots\\ x &\perp e_n\Rightarrow x_n+2x_{n+1}=0\\ &\vdots\end{aligned}$$

כלומר, מתקיים

$$x=\alpha\cdot\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}\in l^2$$

לכן

$$\overline{\operatorname{span}\left\{e_n\right\}}=\left(\operatorname{span}\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}\right)^{\perp}$$

בפרט המערכת אינה שלמה.

תרגיל נגדיר

$$\begin{aligned} L &= \operatorname{span}\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \\ M &= \operatorname{span}\{(1,0,\dots)\} \end{aligned}$$

בסימוני הסעיף הקודם. הראו כי $L+M$ צפוף במרחב l^2.

פתרון נראה כי

$$\overline{L+M}=l^2 \iff (L+M)^{\perp}=\{0\}$$

אבל מתקיים

$$(L+M)^{\perp}=L^{\perp}\cap M^{\perp}$$

יהי $x\in L^{\perp}$, אזי $x_n=\alpha\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n$. אם $x\in M^{\perp}$, אזי $x_1=0$, אבל $x_1=-\frac{\alpha}{2}$, ולכן $x_n=0$ לכל n.

תרגיל הוכיחו כי $\left\{1,t^3,t^6,\dots\right\}$ מערכת שלמה במרחב $C([0,1])$.

פתרון תהי $f\in C([0,1])$. יהי $\varepsilon>0$. נגדיר $g(x)=f\left(x^{\frac{1}{3}}\right)\in C([0,1])$. כעת, המערכת $\{t^n\}_{n\geq 0}$ שלמה בתוך $C([0,1])$, ולכן קיים פולינום $q(x)=\sum a_i x^i$ כך שמתקיים

$$||g-q||_{\infty}<\varepsilon$$

נגדיר $p(x)=q\left(x^3\right)=\sum a_i x^{3i}$, ומתקיים בקלות

$$||g-q||=||f-p||<\varepsilon$$

תרגיל הוכיחו כי $\{\sin(nx)\}_{n=1}^{\infty}$ שלמה במרחב $R([0,\pi])$.

פתרון המערכת $\{\sin(nx)\}_{n=1}^{\infty}$ היא אורתוגונלית במרחב. תהי $f\in R([0,\pi])$ כך שמתקיים

$$\langle f,\sin(nx)\rangle=\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x=0$$

ונראה כי $f=0$. נסתכל על $\tilde{f}$, שהיא ההמשכה האי־זוגית של f לקטע $[-\pi,\pi]$. אזי $\tilde{f}\in R(\mathbb{T})$, אבל בגלל שהיא אי־זוגית מקבלים $\left\langle\tilde{f},\cos nx\right\rangle=0$ לכל n. כמו כן,

$$\tilde{f}(x)\sin(nx)$$

היא פונקציה זוגית בקטע $[-\pi,\pi]$, כלומר

$$\left\langle \tilde{f}, \sin(nx) \right\rangle = 2\int_0^\pi f(x)\sin(nx) = 0$$

מבחירת f. לכן בהכרח מתקבל כי $\tilde{f}=0$ (אורתוגונלי למערכת שלמה), ולכן $f=0$.