<u>מבוא להסתברות</u>

ⓒ ארזים

16 במרץ 2016

1 המשך - הסתברות מותנה

ניזכר בכמה תכונות של מרחבי הסתברות מותנים. יהיו $(\Omega, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות, $A, B \subseteq \Omega$ מאורעות כאשר $\mathbb{P}(B) > 0$.

1.

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

<u>כלל השרשרת/המכפלה:</u>

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A \mid B)$$

2. <u>נוסחת ההסתברות השלמה:</u> אם $\mathbb{P}(B) < 1$,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A \mid B) + \mathbb{P}(B^c) \cdot \mathbb{P}(A \mid B^c)$$

3. <u>נוסחת בייז:</u> אם $\mathbb{P}(A) > 0, \mathbb{P}(B) < 1$,

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A \mid B)}{\mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A \mid B) + \mathbb{P}(B^c) \cdot \mathbb{P}(A \mid B^c)}$$

ניזכר בדוגמא שראינו בפעם הקודמת:
חלק p מהאוכלוסיה חולה במחלה. יש בדיקה שאם אדם בריא, אומרת שהוא חולה בסיכוי q, ואם הוא חולה, היא אומרת שהוא חולה בסיכוי r.
ניקח $p = 0.1, q = 0.01, r = 0.99$.
נבחר אדם באופן אחיד מן האוכלוסיה. נגדיר את המאורעות: B - האדם חולה; A - הבדיקה אמרה שהאדם חולה.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= p \\ \mathbb{P}(A \mid B^c) &= q \\ \mathbb{P}(A \mid B) &= r \end{aligned}$$

נניח שהאדם נבדק ונאמר לו שהוא חולה. נרצה לבדוק מה ההסתברות שהאדם אכן חולה, בהינתן שהבדיקה אמרה שהוא חולה. כלומר,

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{p \cdot r}{p \cdot r + (1-p) \cdot q} = 0.917$$

לעומת זאת, אם $p = 0.01$, ושאר הפרמטרים זהים, כלומר הבדיקה אמינה באותה מידה אבל המחלה נדירה יותר. הפעם,

$$\mathbb{P}(B \mid A) = 0.5$$

אם $p = 0.001$, עם שאר הפרמטרים זהים, אז

$$\mathbb{P}(B \mid A) = 0.09$$

טענה 1.1 (הכללה של התכונות) יהיו $B_1 \dots B_n \subseteq \Omega$ מאורעות זרים, כך שמתקיים

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$$

נניח שמתקיים גם שלכל i, $\mathbb{P}(B_i) > 0$. יהי A מאורע כלשהו.

1. <u>נוסחת ההסתברות השלמה:</u> מתקיים

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i) \cdot \mathbb{P}(A \mid B_i)$$

2. <u>חוק בייז:</u> נניח שגם $\mathbb{P}(A) > 0$. כעת

$$\mathbb{P}(A \mid B_1) = \frac{\mathbb{P}(B_1) \cdot \mathbb{P}(A \mid B_1)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i) \cdot \mathbb{P}(A \mid B_i)}$$

הוכחה: נשים לב שהמאורעות $A \cap B_i$ הם זרים, ואיחודם הוא A. לכן,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\biguplus_{i=1}^{n} (A \cap B_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i) \cdot \mathbb{P}(A \mid B)$$

כאשר המעבר האחרון נובע מכלל השרשרת. כמו כן, מאותו כלל שרשרת, נובע כי

$$\mathbb{P}(B_1 \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B_1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(B_1) \cdot \mathbb{P}(A \mid B_1)}{\mathbb{P}(A)}$$

כאשר המעברון האחרון הוא, שוב, כלל השרשרת. כעת, הפעלת נוסחת ההסתברות השלמה על מכנה נותנת את חוק בייז. ■

טענה 1.2 (כלל השרשרת המוכלל) נתונים $A_1,\dots,A_n$ מאורעות. נניח שמתקיים

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1}A_i\right)>0$$

אזי מתקיים

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=\mathbb{P}\left(A_1\right)\cdot\mathbb{P}\left(A_2\mid A_1\right)\cdot\mathbb{P}\left(A_3\mid A_2\cap A_1\right)\cdot\ldots\cdot\mathbb{P}\left(A_n\mid\bigcap_{i=1}^{n-1}A_i\right)$$

הוכחה: כיוון שמתקיים

$$\mathbb{P}\left(A\mid B\right)=\frac{\mathbb{P}\left(A\cap B\right)}{\mathbb{P}\left(B\right)}$$

מתקיים גם

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(A_1\right)\cdot\mathbb{P}\left(A_2\mid A_1\right)\cdot\mathbb{P}\left(A_3\mid A_2\cap A_1\right)\cdot\ldots\cdot\mathbb{P}\left(A_n\mid\bigcap_{i=1}^{n-1}A_i\right) &= \\ =\mathbb{P}\left(A_1\right)\cdot\frac{\mathbb{P}\left(A_1\cap A_2\right)}{\mathbb{P}\left(A_1\right)}\cdot\ldots\cdot\frac{\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)}{\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1}A_i\right)} &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)\end{aligned}$$

■

פרדוקס סימפסון:

בשנת 1973 תבעו את אוניברסיטת קליפורניה שבברקלי שקיבלה יותר גברים מנשים. הנתונים:

	מועמדים	אחוזי קבלה
גברים	8442	44%
נשים	4321	35%

לפי מחלקות:

	נשים	גברים
A	82%	62%
B	68%	63%
C	34%	37%
D	35%	33%
E	24%	28%
F	7%	6%

האם ייתכן שבכל מחלקות ייתקבלו יותר אחוזים של נשים, ועדיין בכל האוניברסיטה ייתקבלו אחוזים גבוהים יותר של גברים? כן, אם הנשים הולכות לפקולטות שקשה להתקבל אליהן והגברים לכאלו שקל יותר.

דוגמא נוספת: טיפול באבני מרה.

	טיפול א	טיפול ב
אבנים גדולות	87%	93%
אבנים קטנות	69%	73%
החלימו	83%	78%

האם הדבר הגיוני? כן, כי המצב של אבנים קטנות קשה פחות, ולכן בכל מקרה יבריא בסבירות גבוהה יותר. במקרה הזה, ניתן שברים במקום אחוזים:

	טיפול א	טיפול ב
אבנים קטנות	81/87	234/270
אבנים גדולות	192/263	55/80

שתי התופעות הן דוגמאות של פרדוקס סימפסון - על כלל האוכלוסיה קבוצה מסויימת מועדפת, אבל אם לוקחים פרמטר נוסף (המחלקות, או גודל האבנים) נראה שקבוצה אחרת מועדפת.

<u>הסבר מסויים במונחים הסתברותיים:</u>
נשתמש בדוגמת המחלקות באוניברסיטה. נגדיר את מרחב המדגם Ω_m להיות כלל המועמדים הגברים לאוניברסיטה. פונקציית ההסתברות תיתן סיכוי שווה לכל אחד. נגדיר את המאורע A להיות המאורע בו האדם התקבל. נגדיר גם את המאורעות $B_A, \ldots, B_F$ להיות המאורעות שהאדם פנה למחלקה המתאימה. נניח שמאורעות אלה זרים, כלומר כל אדם פונה למחלקה אחת בלבד, וכן שאיחודם הוא כלל המרחב, כלומר לא ניתן לפנות למחלקה אחרת וכל מועמד פונה לאחת.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(B_A)\cdot\mathbb{P}(A \mid B_A)+\ldots+\mathbb{P}(B_F)\cdot\mathbb{P}(A \mid B_F)\\ 0.44 &= \mathbb{P}(B_A)\cdot 0.62+\ldots+\mathbb{P}(B_F)\cdot 0.06\end{aligned}$$

על ידי בחירת ההסתברויות של הפנייה לכל אחת מהמחלקות, ניתן ליצור כל תוצאה בטווח הסתברויות הקבלה (כלומר בין 63% לבין 6%).

2 אי־תלות

נרצה להגדיר מצב שבו מאורע A בלתי־תלוי במאורע B. למשל, בהטלת מטבע הוגן פעמיים, כאשר A הוא המאורע בו התקבל עץ בהטלה הראשונה, והמאורע B הוא כאשר מתקבל עץ בהטלה השנייה.

הגדרה 2.1 מאורעות A, B הם <u>בלתי־תלויים</u> אם $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)$.

<u>דוגמא:</u> מטילים קובייה הוגנת. נגדיר את המאורע A להיות המאורע בו התקבלה תוצאה זוגית, את B להיות המאורע בו התקבלה תוצאה שהיא לכל היותר 4, ואת C להיות המאורע בו התוצאה היא כפולה של 3. אילו זוגות מהשלשה הזו בלתי־תלויים?
<u>פתרון:</u>

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(A)=\frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(B)=\tfrac{2}{3}. \quad \mathbb{P}(C)=\frac{1}{3}\\ &\mathbb{P}(A\cap B)=\frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(A\cap C)=\tfrac{1}{6}, \quad \mathbb{P}(B\cap C)=\frac{1}{6}\\ &\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)=\frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(C)=\tfrac{1}{6} \quad \mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(C)=\frac{2}{9}\end{aligned}$$

לכן נקבל: A,B בלתי־תלויים, A,C בלתי־תלויים, B,C לא בלתי־תלויים.

הגדרה 2.2 (שקולה לקודמת כאשר $\mathbb{P}(B)>0$) המאורעות A,B בלתי־תלויים אם ורק אם

$$\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(A\mid B)$$

נראה את השקילות בין ההגדרות:

$$\mathbb{P}(A\mid B)=\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

לכן

$$\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(A\mid B)=\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}\iff\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(A\cap B)$$

2.1 תכונות בסיסיות

1. מאורע A הוא בלתי־תלוי בעצמו אם ורק אם $\mathbb{P}(A)\in\{0,1\}$.
הוכחה:

$$\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(A\cap A)=\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(A)\iff\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(A)^2\iff\mathbb{P}(A)\in\{0,1\}$$

■

2. אם A,B זרים וגם בלתי־תלויים, אז $\mathbb{P}(A)=0$ או $\mathbb{P}(B)=0$.
הוכחה:

$$0=\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)$$

■

3. אם A,B בלתי־תלויים אזי גם A,B^c בלתי־תלויים.
הוכחה: המאורעות $A\cap B,A\cap B^c$ הם זרים ואיחודם הוא A. לכן

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A)&=\mathbb{P}(A\cap B)+\mathbb{P}(A\cap B^c)=\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(A\cap B^c)\\\mathbb{P}(A\cap B^c)&=\mathbb{P}(A)(1-\mathbb{P}(B))=\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B^c)\end{aligned}$$

■

מסקנה 2.3 A, B בלתי־תלויים אם ורק אם

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A\cap B) &= \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)\\
\mathbb{P}(A\cap B^c) &= \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B^c)\\
\mathbb{P}(A^c\cap B) &= \mathbb{P}(A^c)\cdot\mathbb{P}(B)\\
\mathbb{P}(A^c\cap B^c) &= \mathbb{P}(A^c)\cdot\mathbb{P}(B^c)
\end{aligned}$$

הגדרה אפשרית אחת לאי־תלות של שלושה מאורעות A, B, C היא שמתקיים

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A\cap B\cap C) &= \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(C)\\
\mathbb{P}(A\cap B) &= \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)\\
\mathbb{P}(A\cap C) &= \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(C)\\
\mathbb{P}(B\cap C) &= \mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(C)
\end{aligned}$$

אף שלושה מבין השוויונות לא גוררים את הרביעי. תרגיל נחמד לבית - למצוא שלושה מאורעות שכל שניים מהם בלתי־תלויים, אבל כשלישייה הם לא בלתי־תלויים.