

## מבוא להסתברות

© ארזים

20 במאי 2016

**משפט 0.1** (משפט השונות השלמה)

יהיו  $X, Y$  משתנים מקריים בעלי תוחלת ושונות סופית. אזי

$$V(X) = \mathbb{E}(V(X|Y)) + V(\mathbb{E}(X|Y))$$

**הוכחה:** זאת משום שמתקיים

$$\begin{aligned} V(X) &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X^2|Y)) - (\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)))^2 = \\ &= \mathbb{E}(V(X|Y) + (\mathbb{E}(X|Y))^2) - (\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)))^2 = \\ &= \mathbb{E}(V(X|Y)) + \mathbb{E}((\mathbb{E}(X|Y))^2) - (\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)))^2 = \\ &= \mathbb{E}(V(X|Y)) + V(\mathbb{E}(X|Y)) \end{aligned}$$

■

**תרגיל** יהי  $n \geq 1$ . נגדיר  $T_n$  - מספר ההטלות של מטבע הוגן עד לקבלת רצף של  $n$  עצים.

1. מה היא  $\mathbb{E}(T_n | T_{n-1})$  כפונקציה של  $T_{n-1}$ ?

2.  $\mathbb{E}(T_n)$ .

**פתרון**

1. יש שתי אפשרויות: לאחר שמגיעים אל  $T_{n-1}$ , אם יוצא עץ, אז  $T_{n-1} + 1 = T_n$ , אחרת  $T_n = T_{n-1} + 1 + T'_n$ , כאשר  $T'_n \sim T_n$ . כעת,

$$T_n | T_{n-1} \sim \begin{cases} T_{n-1} + 1 | T_{n-1} & \frac{1}{2} \\ T_{n-1} + 1 + T'_n | T_{n-1} & \frac{1}{2} \end{cases}$$

לכן, נקבל

$$\mathbb{E}(T_n | T_{n-1}) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(T_{n-1} + 1 | T_{n-1}) + \frac{1}{2}\mathbb{E}[T_{n-1} + 1 + T'_n | T_{n-1}]$$

מתקיים כי  $T'_n$  בלתי תלוי במשתנה  $T_{n-1}$ , ולכן השוויון הקודם מתפשט לכדי

$$= \frac{1}{2}(T_{n-1} + 1) + \frac{1}{2}(T_{n-1} + 1) + \frac{1}{2}\mathbb{E}(T_n) = T_{n-1} + 1 + \frac{1}{2}\mathbb{E}(T_{n-1})$$

.2

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T_n) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(T_n | T_{n-1})) = \mathbb{E}\left(T_{n-1} + 1 + \frac{1}{2}\mathbb{E}(T_n)\right) \\ \frac{1}{2}\mathbb{E}(T_n) &= \mathbb{E}(T_{n-1}) + 1 \\ \mathbb{E}(T_n) &= 2\mathbb{E}(T_{n-1}) + 2 = 2(2\mathbb{E}(T_{n-2}) + 2) + 2 = \\ &= 4\mathbb{E}(T_{n-2}) + 4 + 2 = \dots = 2^{n-1}\mathbb{E}(T_1) + \sum_{i=1}^{n-1} 2^i = \\ &= 2^n + \sum_{i=1}^{n-1} 2^i = \sum_{i=1}^n 2^i = 2^{n+1} - 2 \end{aligned}$$

## 1 אי שוויונות

### 1.1 מרקוב

יהי  $X$  משתנה מקרי אי-שלילי ויהי  $\alpha > 0$ , אזי

$$\mathbb{P}(X \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\alpha}$$

### 1.2 צ'בישב

יהי  $X$  משתנה מקרי בעל שונות סופית ויהי  $\alpha > 0$ , אזי

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq \alpha) \leq \frac{V(X)}{\alpha^2}$$

### 1.2.1 חז צדדי

אי שוויונות אלה חשובים כאשר ההתפלגות מסובכת או כשמחפשים גבול.

**תרגיל** יהי  $X$  משתנה מקרי ונתון כי  $\mathbb{P}(0 \leq X \leq 1) = 1$ ,  $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}$ . נגדיר  $p = \mathbb{P}(X > \frac{1}{4})$ . מה הערך המינימלי והמקסימלי של  $p$ ?

1. מקסימום 1, מינימום 0

$$p = \frac{3}{4}. 2$$

3. מקסימום 1, מינימום  $\frac{1}{3}$

4. אף תשובה

**פתרון** אם  $X \equiv \frac{1}{2}$ , אזי  $p = 1$ . לא ייתכן מצב בו  $p = 0$ , כי אז  $X \leq \frac{1}{4}$  בהסתברות 1, ולכן  $\mathbb{E}(X) \leq \frac{1}{4}$ , בסתירה. נניח כי

$$X \sim \begin{cases} \frac{1}{4} & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} \end{cases}$$

במצב זה מתקבל  $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ . נוכיח בעזרת מרקוב כי  $p \geq \frac{1}{3}$  ונסיים:

$$\begin{aligned} p &= \mathbb{P}\left(X > \frac{1}{4}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(X \leq \frac{1}{4}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(1 - \frac{1}{4} \leq 1 - X\right) \geq 1 - \frac{\mathbb{E}(1 - X)}{\frac{3}{4}} = \\ &= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

**תרגיל** (מפברואר 2015) יהי  $n \geq 2$ . תהי  $\sigma$  פרמוטציה על  $\{1, \dots, n\}$  שנבחרה באופן אחיד מבין כל האפשרויות. נגדיר  $I = |\{(i, j) \mid i < j, \sigma(i) > \sigma(j)\}|$ , כלומר מספר ההחלפות בסדר שהפרמוטציה מייצרת.

1. חשבו את  $\mathbb{E}(I)$

2. חשבו את  $V(I)$

3. הוכיחו כי לכל  $\varepsilon > 0$ , מתקיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\left|I - \frac{n^2}{4}\right| > n^{\frac{3}{2} + \varepsilon}\right) = 0$$

**פתרון**

1. נגדיר  $X_{i,j}$  לכל  $i < j$  להיות האינדיקטור

$$X_{i,j} = \begin{cases} 1 & \sigma(i) > \sigma(j) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ההתפלגות שלהם היא

$$X_{i,j} \sim \text{Ber}\left(\frac{1}{2}\right)$$

כעת מתקיים

$$\mathbb{E}(I) = \sum_{i < j} \mathbb{E}(X_{i,j}) = \frac{1}{2} \cdot \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{4} = \frac{n^2 - n}{4}$$

.2

$$\begin{aligned} V(I) &= V\left(\sum_{i < j} X_{i,j}\right) = \sum_{i < j} V(X_{i,j}) + \sum_{\substack{i < j \\ \neq \\ k < l}} \text{cov}(X_{i,j}, X_{k,l}) = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \binom{n}{2} + \sum_{i,j,k,l} \text{cov}(X_{i,j}, X_{k,l}) \end{aligned}$$

אם האינדקסים שונים לחלוטין אזי  $X_{i,j}, X_{k,l}$  בלתי תלויים, לכן  $\text{cov}(X_{i,j}, X_{k,l}) = 0$ . לכן צריך לבחור רק מקרה שבו יש אינקס אחד משותף. במילים אחרות, נסתכל על שלשות של אינדקסים  $i < j < k$ , ונתבונן במצבים

$$\text{cov}(X_{i,j}, X_{i,k}), \text{cov}(X_{i,j}, X_{j,k}), \text{cov}(X_{i,k}, X_{j,k})$$

נחשב

$$\begin{aligned} \text{cov}(X_{i,j}, X_{i,k}) &= \mathbb{E}(X_{i,j} \cdot X_{i,k}) - \mathbb{E}(X_{i,j}) \cdot \mathbb{E}(X_{i,k}) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \\ \text{cov}(X_{i,j}, X_{j,k}) &= \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{12} \\ \text{cov}(X_{i,k}, X_{j,k}) &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

ולכן בסך הכל

$$V(I) = \frac{1}{4} \cdot \binom{n}{2} + 2 \cdot \binom{n}{3} \cdot \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{12} - \frac{1}{12}\right) = \frac{n^2 - n}{8} + \frac{1}{6} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$$

.3

$$\mathbb{P}\left(|I - \mathbb{E}I| \geq n^{\frac{3}{2} + \varepsilon}\right) \leq \frac{V(I)}{\left(n^{\frac{3}{2} + \varepsilon}\right)^2} \approx \frac{n^3}{n^{3+2\varepsilon}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

כעת, מתקיים

$$\begin{aligned} \left|I - \frac{n^2 - n}{4}\right| \geq n^{\frac{3}{2} + \varepsilon} &\Rightarrow \begin{cases} I - \frac{n^2 - n}{4} \geq n^{\frac{3}{2} + \varepsilon} \\ I - \frac{n^2 - n}{4} \leq -n^{\frac{3}{2} + \varepsilon} \end{cases} \\ \Downarrow \\ \left|I - \frac{n^2}{4}\right| \geq n^{\frac{3}{2} + \frac{\varepsilon}{2}} &\Leftrightarrow \begin{cases} I - \frac{n^2}{4} \geq n^{\frac{3}{2} + \varepsilon} - \frac{n}{4} \geq n^{\frac{3}{2} + \frac{\varepsilon}{2}} \\ I - \frac{n^2}{4} \leq -n^{\frac{3}{2} + \varepsilon} - \frac{n}{4} \leq -n^{\frac{3}{2} + \frac{\varepsilon}{2}} \end{cases} \end{aligned}$$

ולכן עבור  $n$  גדול מספיק מתקיים הגבול שרצינו להראות.