# אלגבראות לי

ⓒ ארזים

6 במאי 2019

## 1 אלגבראות לי פשוטות למחצה

### 1.1 אלגבראות לי רדוקטיביות

**משפט 1.1** תהי $L$ אלגברת לי פשוטה למחצה ממימד סופי מעל שדה $F$. תהי $M \subset L$ תת אלגברת לי שעבורה התבנית $\kappa_L\mid_{M\times M}$ אינה מנוונת, וכן כך שלכל $x\in M$, המחוברים $x_s, x_n$ בפירוק ז'ורדן־שבליי של $x$ שניהם מתוך $M$ גם כן. אזי $M$ רדוקטיבית בתוך $L$.

**הוכחה:** ראשית נראה כי $M$ רדוקטיבית. נסמן $\pi = \mathrm{ad}_L\mid_M$ הצגה של $M$ במרחב $L$. נראה כי $\pi$ פריקה לחלוטין. ניזכר באידאל הנילפוטנטיות של $\mathcal{N}_\pi$ - אידאל של $M$ שמכיל כל אידאל $J$ עבורו $\pi(J)$ מורכבת רק מאופרטורים נילפוטנטיים. ניזכר גם שהראינו כי $\mathcal{N}_\pi$ מאונך לכל $M$ ביחס לתבנית

$$b_\pi(x,y) = \mathrm{tr}\left(\pi(x)\,\pi(y)\right)$$

במקרה שלנו,

$$b_\pi(x,y) = \mathrm{tr}\left(\mathrm{ad}_L x\left(\mathrm{ad}_L y\right)\right) = \kappa_L(x,y)$$

הנחנו כי התבנית בצד ימין לא מנוונת על $M\times M$, ולכן בהכרח נקבל כי $\mathcal{N}_\pi = 0$. ראינו ביטוי נוסף עבור אידאל זה: אם

$$L = V_n \supset V_{n-1} \supset \cdots \supset V_1 \supset V_0 = 0$$

סדרת הרכבת של $\pi$, ואם נסמן $\pi_i$ את ההצגה של $M$ במרחב $V_{i+1}/V_i$ (הצגה אי פריקה), אזי

$$\mathcal{N}_\pi = \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker \pi_i$$

נתבונן כעת בהצגה

$$\rho = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \pi_i$$

זו כמובן הצגה פריקה לחלוטין של $M$. היא גם חד־חד־ערכית, שכן

$$\ker\rho = \mathcal{N}_\pi = 0$$

נניח כעת כי $F$ סגור אלגברית, ונתבונן במנה $V_{\pi_i} = {}^{\pi_i}/_{\mathrm{Rad}M}$ כיוון שהרדיקאל של $M$ הוא אידאל פתיר, ניתן לשלש את המנה הזו סימולטנית, ובפרט יש פונקציונאל לינארית $\lambda \in (\mathrm{Rad}M)^*$ שמקיים

$$V_{\pi_i,\lambda} = \{w \in V_{\pi_i} \mid \pi_i(x)\,w = \lambda(x)\,w \forall x \in \mathrm{Rad}M\} \neq 0$$

כיוון שהרדיקאל $\mathrm{Rad}M$ הוא אידאל של $M$, ראינו כי $V_{\pi_i,\lambda}$ הוא תת מרחב אינווריאנטי של $V_{\pi_i}$ (כמודולים מעל $M$). כיוון שההצגה $\pi_i$ אי פריקה, נקבל $V_{\pi_i,\lambda} = V_{\pi_i}$, ולכן לכל $w \in V_{\pi_i}$ ולכל $x \in \mathrm{Rad}M$ נקבל כי

$$\pi_i(x)\,w = \lambda(x)\,w$$

מכאן

$$\pi_i([M, \mathrm{Rad}M]) = [\pi_i(M), \pi_i(\mathrm{Rad}M)] = 0$$

ומכאן נקבל כי גם

$$\rho([M, \mathrm{Rad}M]) = 0$$

כיוון שההצגה $\rho$ חד־חד־ערכית, נקבל כי

$$[M, \mathrm{Rad}M] = 0$$

מכאן, $\mathrm{Rad}M \subset Z(M)$. ההכלה השנייה נכונה תמיד, ולכן נקבל $\mathrm{Rad}M = Z(M)$, כלומר $M$ רדוקטיבית. אם $F$ אינו סגור אלגברית, נשתמש בסימונים הרגילים להרחבות סקלרים ונקבל

$$\mathrm{Rad}(M_{\overline{F}}) = (\mathrm{Rad}M)_{\overline{F}}$$

מההוכחה עד כה נוכל להסיק כי אם $\sigma$ הצגה אי פריקה של $M_{\overline{F}}$, אזי $\sigma([M_{\overline{F}}, \mathrm{Rad}(M_{\overline{F}})]) = 0$. לכן אם $\eta$ היא הצגה פריקה לחלוטין של $M_{\overline{F}}$, אזי גם $\eta([M_{\overline{F}}, \mathrm{Rad}(M_{\overline{F}})]) = 0$. נפעיל את זה עבור ההצגה $\eta = \rho_{\overline{F}} = \rho \otimes_F 1_{\overline{F}}$. ראינו בתרגיל בית 3 שאם $\rho$ פריקה לחלוטין אז גם $\rho_{\overline{F}}$ פריקה לחלוטין, ולכן נקבל למעשה כי

$$\rho_{\overline{F}}([M_{\overline{F}}, \mathrm{Rad}(M_{\overline{F}})]) = 0$$

וכן

$$[M_{\overline{F}}, \mathrm{Rad}(M_{\overline{F}})] = \left[M \otimes_F \overline{F}, \mathrm{Rad}(M) \otimes_F \overline{F}\right] = [M, \mathrm{Rad}M] \otimes_F \overline{F}$$

אם כן נקבל כי

$$\rho([M, \mathrm{Rad}M]) \otimes_F \overline{F} = 0$$

ולכן

$$\rho([M, \mathrm{Rad}M]) = 0$$

ומכאן מסיימים כמו קודם ($\rho$ חד־חד־ערכית ולכן $\mathrm{Rad}M = Z(M)$). נראה עכשיו שכל איבר $x \in Z(M)$ הוא פשוט למחצה, כלומר $x_n = 0$. נכתוב את הפירוק

$$x = x_s + x_n$$

לפי ההנחה שלנו $x_s, x_n \in M$. ניזכר כי יש לנו גם הפירוק

$$\mathrm{ad}_L x = \mathrm{ad}_L x_s + \mathrm{ad}_L x_n$$

ניזכר שניתן לכתוב את המחוברים בצד ימין כפולינומים ללא איבר חופשי בצד שמאל, כלומר $\mathrm{ad}_L x$, עם מקדמים מתוך $\overline{F}$. נכתוב

$$\mathrm{ad}_L x_n = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j \mathrm{ad}_L^j x$$

כאשר $\alpha_j \in \overline{F}$. לכל $m \in M$ נקבל

$$\mathrm{ad}_L x_n (m) = [x_n, m]$$

נוכל להרחיב סקלרים עד הסגור האלגברי ולפתוח את הסכום ־ אבל אז נקבל $[x, m]$, והרי $x \in Z(M)$ ־ כלומר $[x, m] = 0$. לכן נקבל למעשה כי $[x_n, m] = 0$ לכל $m \in M$, משמע $x_n \in Z(M)$. מכאן שלכל $y \in M$ האופרטור $\mathrm{ad}_L x_n \circ \mathrm{ad}_L y$ נילפוטנטי, משמע העקבה שלו 0 ־ כלומר $\kappa_L(x_n, y) = 0$ לכל $y \in M$. מהנחת חוסר הניוון של $\kappa_L|_{M\times M}$, נקבל כי בהכרח $x_n = 0$, ולכן $x = x_s$ פשוט למחצה. נניח לבינתיים שוב כי $F$ סגור אלגברית. ניזכר שראינו בשבוע שעבר שנוכל לכתוב

$$M = S \oplus \mathrm{Rad}M = S \oplus Z(M)$$

כאשר $S \subset M$ פשוטה למחצה. נתבונן במשפחת האופרטורים

$$\{\mathrm{ad}_L x \mid x \in Z(M)\}$$

זו משפחה קומוטטיבית של אופרטורים ניתנים ללכסון על המרחב $L$, ולכן ניתנת ללכסון סימולטני. נפרק

$$L = \bigoplus_{\lambda \in Z(M)^*} L_\lambda$$

כאשר

$$L_\lambda = \{v \in L \mid [x, v] = \lambda(x) v \forall x \in Z(M)\}$$

ברור כי לכל $L_\lambda$ שמופיע בפירוק, הוא מרחב אינווריאנטי לאלגברה $S$. $S$ פשוטה למחצה, ולכן ההצגה של $S$ במרחב $L_\lambda$ פריקה לחלוטין. כל מחובר אי פריק של $L_\lambda$ מעל $S$ הוא כזה שעליו $Z(M)$ פועלת על ידי כפל פי $\lambda$, ולכן מחובר זה נשאר אי פריק כהצגה של $M$, וזה מראה לנו כי $\pi(x) = \mathrm{ad}_L x$ ($x \in M$) פריקה לחלוטין. לשדה כללי, נקבל כי $\pi_{\overline{F}} = \pi \otimes_F 1_{\overline{F}}$ פריקה לחלוטין ולכן $\pi$ פריקה לחלוטין (זה גם כן מתרגיל בית 3). ■

## 1.2 ההצגות של $\mathrm{sl}_2F$

ניקח את הבסיס

$$e=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},f=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},h=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

המקיים

$$[h,e]=2e,[h,f]=-2f,[e,f]=h$$

נניח כי $F$ סגור אלגברית (וכמובן ממציין 0). תהי $\pi$ הצגה ממימד סופי של $\mathrm{sl}_2F$ במרחב $V$. האלגברה $\mathrm{sl}_2F$ היא פשוטה למחצה (ואפילו פשוטה). $\pi\left(h\right)$ בהכרח ניתן ללכסון, כי $h$ איבר פשוט למחצה (ואפילו נתון בצורה אלכסונית). נכתוב

$$V=\bigoplus_{\lambda\in F}V_\lambda$$

כאשר

$$V_\lambda=\{v\in V\mid\pi\left(h\right)v=\lambda v\}$$

**למה 1.2** יהי $\lambda$ ערך עצמי של $\pi\left(h\right)$. אזי

$$\begin{aligned}\pi\left(e\right)V_\lambda&\subset V_{\lambda+2}\\ \pi\left(f\right)V_\lambda&\subset V_{\lambda-2}\end{aligned}$$

**הוכחה:** יהי $v\in V_\lambda$. כעת

$$\pi\left(h\right)\left(\pi\left(e\right)v\right)=\pi\left(e\right)\pi\left(h\right)v+\pi\left(\underbrace{[h,e]}_{=2e}\right)v=\lambda\pi\left(e\right)v+2\pi\left(e\right)v=\left(\lambda+2\right)\pi\left(e\right)v$$

באותה צורה בדיוק נקבל

$$\pi\left(h\right)\left(\pi\left(f\right)v\right)=\left(\lambda-2\right)\pi\left(e\right)v$$

■

כמובן שיש מספר סופי של ערכים עצמיים של $\pi\left(h\right)$, ולכן יש ערך עצמי $\lambda_0$ עבורו $V_{\lambda_0}\neq 0$, $V_{\lambda_0+2}=0$. אם כן, נקבל כי

$$\pi\left(e\right)\left(V_{\lambda_0}\right)=0$$

נבחר $0\neq v_0\in V_{\lambda_0}$. אזי $\pi\left(h\right)v_0=\lambda_0v_0$. נגדיר

$$v_i=\pi\left(f\right)^iv_0$$

**למה 1.3** מתקיימים:

1. $\pi(h)v_i = (\lambda_0 - 2i)v_i$
2. $\pi(f)v_i = v_{i+1}$
3. $\pi(e)v_i = i(\lambda_0 - i + 1)v_{i-1}$ (נגדיר $v_{-1} = 0$).

**הוכחה:** הסעיפים 1,2 ברורים ־ נראה את 3. באינדוקציה ־ כמובן $\pi(e)v_0 = 0$. כעת,

$$\begin{aligned}\pi(e)v_{i+1} &= \pi(e)\pi(f)v_i = \pi(f)\pi(e)v_i + \pi([e,f])v_i = \\ &= i(\lambda_0 - i + 1)\pi(f)v_{i-1} + (\lambda_0 - 2i)v_i = \\ &= \left(i\lambda_0 - i^2 + i + \lambda_0 - 2i\right)v_i = ((i+1)\lambda_0 - (i+1)i)v_i = \\ &= (i+1)(\lambda_0 - i)v_i\end{aligned}$$

וסיימנו. ■

יהי $r \geq 0$ עבורו $v_{r+1} = 0$, אבל $v_r \neq 0$. לכן הקבוצה $B = \{v_0, v_1, \ldots, v_r\} \subset V$ קבוצה בלתי תלויה לינארית (כי אלה ווקטורים שאינם 0, שהם ווקטורים עצמיים של $\pi(h)$ ביחס לערכים עצמיים שונים זה מזה $\lambda_0, \lambda_0 - 2, \ldots, \lambda_0 - 2r$. נסמן כעת

$$U = \mathrm{span}B \subset V$$

זהו תת מרחב אינווריאנטי לפי הלמה האחרונה. כעת,

$$\begin{aligned}v_{r+1} &= 0 \\ \pi(e)v_{r+1} &= 0 \\ (r+1)(\lambda_0 - r)v_r &= 0\end{aligned}$$

נקבל אם כן בהכרח שמתקיים $\lambda_0 = r$ (מספר שלם אי שלילי). נכתוב את המטריצות:

$$[\pi(h)|_U]_B = \begin{pmatrix} r & & & \\ & r-2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -r \end{pmatrix}$$

$$[\pi(f)|_U]_B = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\pi(e)|_U]_B = \begin{pmatrix} 0 & r & & & \\ & 0 & 2(r-1) & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & r \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

במטריצה האחרונה, בשורה $i$, מיד מעל האלכסון הראשי יהיה הערך $i(r-i+1)$.

**משפט 1.4** יהי $F$ שדה סגור אלגברית. תהי $\pi$ הצגה אי פריקה ממימד $r+1\geq 1$ של $\mathrm{sl}_2F$ במרחב $V$. אזי

$$V=\bigoplus_{i=0}^{r}V_{r-2i}$$

כאשר $\dim V_{r-2i}=1$ לכל $0\leq i\leq r$. אפשר לבחור בסיס $B=\{v_0,v_1,\ldots,v_r\}$ של $V$ עבורו $v_i\in V_{r-2i}$, כך שהמטריצות של $\pi\left(h\right),\pi\left(e\right),\pi\left(f\right)$ לפי הבסיס $B$ נתונות על ידי המטריצות שחישבנו לפני רגע.

יהי $r\geq 0$ שלם, ונרשה לשדה שלנו להיות כלשהו (ממציין 0). נגדיר את המטריצות $\rho_r\left(h\right),\rho_r\left(e\right),\rho_r\left(f\right)$ לפי המטריצות שלמעלה. נרחיב כעת את $\rho_r$ להעתקה לינארית

$$\begin{gathered}\rho_r:\mathrm{sl}_2F\to\mathrm{gl}_{r+1}F\\ \rho_r\left(ah+be+cf\right)=a\rho_r\left(h\right)+b\rho_r\left(e\right)+c\rho_r\left(f\right)\end{gathered}$$

נטען כי $\rho_r$ היא הצגה של $\mathrm{sl}_2F$ במרחב $F^{r+1}$. כדי לבדוק, מספיק לבדוק שמירת קומוטטורים. יספיק לנו להראות כי

$$\begin{gathered}\left[\rho_r\left(h\right),\rho_r\left(e\right)\right]=2\rho_r\left(e\right)\\ \left[\rho_r\left(h\right),\rho_r\left(f\right)\right]=-2\rho_r\left(f\right)\\ \left[\rho_r\left(e\right),\rho_r\left(f\right)\right]=\rho_r\left(h\right)\end{gathered}$$

נראה לדוגמה את הראשון.

$$\begin{aligned}\left[\rho_r\left(h\right),\rho_r\left(e\right)\right]&=\begin{pmatrix}r&&&\\&r-2&&\\&&\ddots&\\&&&-r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&r&&&\\&0&2\left(r-1\right)&&\\&&0&\ddots&\\&&&\ddots&r\\&&&&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&r&&&\\&0&2\left(r-1\right)&&\\&&0&\ddots&\\&&&\ddots&r\\&&&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r&&\\&r-2&\\&&\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\ddots&i\left(r-2i\right)\left(r-i+1\right)&\\&0&\\&&\ddots\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\ddots&i\left(r-2\left(i+1\right)\right)\left(r-i+1\right)&\\&0&\\&&\ddots\end{pmatrix}=\\ &=\begin{pmatrix}\ddots&2i\left(r-i+1\right)&\\&0&\\&&\ddots\end{pmatrix}=2\rho_r\left(e\right)\end{aligned}$$

ובצורה זו נוכל לחשב גם את השוויונות האחרים.

**טענה 1.5** $\rho_r$ הצגה אי פריקה של $\mathrm{sl}_2F$.

**הוכחה:** יהי $0\neq U\subset F^{r+1}$ תת מרחב אינווריאנטי. המטריצה $\rho_r\left(h\right)$ אלכסונית, ולכן ברור כי $\rho_r\left(h\right)|_U$ ניתנת ללכסון מעל $F$. ניקח לה ווקטור עצמי $0\neq u_0\in U$, כלומר יש $0\leq i_0\leq r$ עבורו

$$\rho_r\left(h\right)u_0=\left(r-2i_0\right)u_0$$

לפי הגדרת $\rho_r$, כשנסמן $V = F^{r+1}$, נקבל

$$V = \bigoplus_{i=0}^{r} V_{r-2i}$$

ולכן $\dim V_{r-2i} = 1$ לכל $i$. מכאן $V_{r-2i_0} \subset U$. אפשר לבחור $u_0 = e_{i_0+1}$ (האיבר מהבסיס הסטנדרטי שבו יש 1 בקואורדינטה $i+1$). כעת מתיאור המטריצות של $\rho_r$, ברור למשל כי

$$\rho_r\left(f\right)^i u_0 = e_{i_0+i+1}$$

ולכן $e_{i_0}+1, \ldots, e_{r+1} \in U$. באופן דומה, כשנפעיל את $\rho_r\left(e\right)^i$, נקבל כפולות של $e_{i_0+1-i}$.
בסך הכל, נקבל כי $U = V = F^{r+1}$. לכן קיבלנו כי $\rho_r$ אי פריקה. ■

**משפט 1.6** יהי $F$ שדה ממציין 0. תהי $\pi$ הצגה אי פריקה במרחב $V$ ממימד $r+1 \geq 1$ של $\mathrm{sl}_2 F$. אזי $\pi$ שקולה להצגה $\rho_r$.

**הוכחה:** יהי $B$ בסיס של $V$. נסמן

$$\pi'\left(x\right) = \left[\pi\left(x\right)\right]_B$$

לכל $x \in \mathrm{sl}_2 F$. כעת נרחיב לסגור האלגברי $\overline{F}$: לכל $\alpha, \beta, \gamma \in \overline{F}$ נגדיר

$$\pi'_{\overline{F}}\left(\alpha e + \beta h + \gamma f\right) = \alpha \pi'\left(e\right) + \beta \pi'\left(h\right) + \gamma \pi'\left(f\right)$$

זו הצגה של $\mathrm{sl}_2 \overline{F}$ במרחב $\overline{F}^{r+1}$. אנו יודעים כי $\pi'\left(h\right)$ ניתנת ללכסון מעל $\overline{F}$. ראינו קודם כי הערכים העצמיים של $\pi'\left(h\right)$ בתוך $\overline{F}$ הם מספרים שלמים, ובפרט הם בשדה $F$. לכן $\pi'\left(h\right)$ ניתנת ללכסון מעל $F$. עכשיו נוכל לחזור על כל מה שעשינו קודם, ולקבל כי $\pi'$ שקולה להצגה $\rho_r$. ■

**מסקנה 1.7** תהי $\pi$ הצגה ממימד סופי של $\mathrm{sl}_2 F$. אזי $\pi$ מתפרקת בצורה הבאה:

$$\pi \cong \bigoplus_{i=1}^{k} \rho_{r_i}$$

כאשר $r_1, \ldots, r_k \geq 0$ שלמים.

בהקשר של המסקנה, נוכל לתאר קונקרטית את מספר המחוברים האי פריקים. נניח כי $r \geq 0$ שלם וזוגי. נתבונן בהצגה $\rho_r$ במרחב $V_{\rho_r}$. הערכים העצמיים הם מהצורה $r - 2i$. הנחנו כי $r$ זוגי ולכן אחד הערכים העצמיים הוא 0. כלומר

$$\dim\left(V_{\rho_r}\right)_{\lambda=0} = 1$$
$$\dim\left(V_{\rho_r}\right)_{\lambda=1} = 0$$

כאשר $r \geq 0$ שלם אי זוגי נקבל בדיוק הפוך:

$$\dim\left(V_{\rho_r}\right)_{\lambda=0} = 0$$
$$\dim\left(V_{\rho_r}\right)_{\lambda=1} = 1$$

לכן נקבל כי מספר המחוברים האי פריקים בפירוק של $\pi$ שווה בדיוק

$$\dim\left(V_{\pi}\right)_{\lambda=0}+\dim\left(V_{\pi}\right)_{\lambda=1}$$

כעת, ניקח $m,n\geq 0$ שני שלמים. נתאר את הפירוק של ההצגה

$$\pi=\rho_m\otimes\rho_n$$

שהיא ממימד $\left(m+1\right)\left(n+1\right)$. נסמן $V_n=V_{\rho_n},V_m=V_{\rho_m}$. נבחר בסיסים

$$B_m=\left\{v_{m,k}\right\}_{k=0}^{m}$$
$$B_n=\left\{v_{n,j}\right\}_{j=0}^{n}$$

כך הם מלכסנים בהתאמה את $\rho_m\left(h\right)$, $\rho_n\left(h\right)$. כלומר מתקיים

$$\rho_m\left(h\right)v_{m,k}=\left(m-2k\right)v_{m,k}$$
$$\rho_n\left(h\right)v_{n,j}=\left(n-2j\right)v_{n,j}$$

אנחנו יודעים כי

$$B=\left\{v_{m,k}\otimes v_{n,j}\right\}_{j,k=0}^{n,m}$$

בסיס למרחב $V_m\otimes V_n$. הווקטורים הללו נותנים לכסון של $\pi\left(h\right)$:

$$\begin{aligned}\pi\left(h\right)\left(v_{m,k}\otimes v_{n,j}\right)&=\rho_m\left(h\right)\left(v_{m,k}\right)\otimes v_{n,j}+v_{m,k}\otimes\rho_n\left(h\right)\left(v_{n,j}\right)=\\&=\left(m-2k\right)\left(v_{m,k}\otimes v_{n,j}\right)+\left(n-2j\right)\left(v_{m,k}\otimes v_{n,j}\right)=\\&=\left(m+n-2\left(k+j\right)\right)\left(v_{m,k}\otimes v_{n,j}\right)\end{aligned}$$

נפרק

$$\pi=\rho_m\otimes\rho_n=\bigoplus c_l\rho_l$$

הריבוי של $m+n$ כערך עצמי הוא 1 כי צריך שיתקיים

$$2\left(k+j\right)=0$$

וזה ייתכן רק כאשר $k=j=0$. זה הערך העצמי הגדול ביותר שמופיע. מכאן נסיק כי $\rho_{m+n}$ מופיעה בפירוק פעם אחת בדיוק (כלומר $c_{m+n}=1$). הריבוי של $m+n-2$ הוא 2:

$$2\left(k+j\right)=2$$
$$k+j=1$$

כלומר $\left\{k,j\right\}=\left\{0,1\right\}$ - 2 אפשרויות. $m+n-2$ הוא ערך עצמי שמופיע פעם אחת גם בהצגה $\rho_{m+n}$, ולכן הפעם הנוספת תהיה חייבת להגיע מההצגה $\rho_{m+n-2}$ - שגם היא תופיע פעם אחת בדיוק. באופן הזה נמשיך - הערך העצמי הבא הוא $m+n-4$, שמכריח

$$k+j=2$$

נקבל 3 אפשרויות - $\{0,2\}$ או $\{1,1\}$. שתיים מהופעות אלה באות משתי ההצגות הקודמות שראינו, ולכן נקבל שגם $\rho_{m+n-4}$ תופיע בדיוק פעם אחת. נוכל להמשיך באינדוקציה ולקבל כי

$$\pi=\rho_m\otimes\rho_n=\bigoplus_{j=0}^{s}\rho_{m+n-2s}$$

אם נשווה מימדים נקבל כי

$$(m+1)\,(n+1)=\sum_{j=0}^{s}(m+n-2j+1)=\frac{(s+1)}{2}\,(m+n+1+m+n-2s+1)=$$
$$=(s+1)\,(m+n+1-s)$$

נסמן $z=s+1$ ואחרי העברת אגפים נקבל את המשוואה

$$(z-(m+1))\,(z-(n+1))=0$$

כלומר $z=m+1$ או $z=n+1$, משמע $s=m$ או $s=n$. נצטרך כי $s=\min(m,n)$, כי אחרת נקבל הצגה $\rho_r$ עם אינדקס שלילי. בסך הכל נקבל

$$\pi=\rho_m\otimes\rho_n=\bigoplus_{j=0}^{\min(n,m)}\rho_{m+n-2j}$$

המחובר האחרון הוא

$$\rho_{|m-n|}$$

זה מקרה פרטי של נוסחה מפורסמת בשם נוסחת קלבש־גורדן (Clebsch-Gordan).

## 1.3 תת אלגבראות של קרטן (Cartan)

**הגדרה 1.8** תהי $L$ אלגברת לי ממימד סופי. תהי $H\subset L$ תת אלגברת לי. נאמר כי $H$ תת אלגברת קרטן אם $H$ נילפוטנטית, וכן

$$\mathcal{N}_L\,(H)=H$$

**דוגמא** באלגברת לי $\mathrm{gl}_nF$, תת האלגברה $\mathrm{d}_nF$ היא תת אלגברת קרטן. בבירור היא נילפוטנטית (כי היא אבלית). נחפש מטריצות $A$ המקיימות

$$[A,\mathrm{d}_nF]\subset\mathrm{d}_nF$$

הקומוטטור הוא מהצורה

$$[A,\mathrm{diag}\,(d_j)]=((d_j-d_i)\,A_{i,j})_{i,j}$$

נרצה שלכל $i\neq j$ ולכל $d_1,\ldots,d_n$ יתקיים $(d_i-d_j)\,x_{i,j}=0$ כדי שהמטריצה המתקבלת תהיה אלכסונית, כלומר נצטרך $A_{i,j}=0$ לכל $i\neq j$, כלומר $A\in\mathrm{d}_nF$.

**טענה 1.9** יהי $F \subset K$ שדה הרחבה. אזי $H \subset L$ תת אלגברת קרטן אם ורק אם $H_K \subset L_K$ תת אלגברת קרטן.

**הוכחה:** אנחנו מכירים כבר את התנאי הזה עבור נילפוטנטיות - כלומר $H$ נילפוטנטית אם ורק אם $H_K$ נילפוטנטית. לגבי התכונה השנייה, נראה כי

$$\mathcal{N}_{L_K}\left(H_K\right) = \left(\mathcal{N}_L\left(H\right)\right)_K$$

באופן כללי. נבחר בסיס $\{t_\alpha\}_{\alpha \in J}$ של $K$ מעל $F$. יהי

$$w = \sum_{\alpha \in J} x_\alpha \otimes t_\alpha \in \mathcal{N}_{L_K}\left(H_K\right)$$

כאשר $x_\alpha \in L$. בפרט, לכל $h \in H$ מתקיים

$$[w, h \otimes 1] = \sum_\alpha [x_\alpha, h] \otimes t_\alpha \in H_K$$

לכן יש $y_\alpha \in H$ עבורם

$$\sum_\alpha [x_\alpha, h] \otimes t_\alpha = \sum_\alpha y_\alpha \otimes t_\alpha$$

ונסיק כי $[x_\alpha, h] = y_\alpha \in H$. כלומר $x_\alpha \in \mathcal{N}_L\left(H\right)$. לכן, $w \in \left(\mathcal{N}_L\left(H\right)\right)_K$. כלומר הראינו

$$\mathcal{N}_{L_K}\left(H_K\right) \subset \left(\mathcal{N}_L\left(H\right)\right)_K$$

ההכלה השנייה קלה, ולכן השוויון. אם $H$ תת אלגברת קרטן, אזי $\mathcal{N}_L\left(H\right) = H$, כלומר

$$\mathcal{N}_{L_K}\left(H_K\right) = \left(\mathcal{N}_L\left(H\right)\right)_K = H_K$$

ולכן גם $H_K$ היא תת אלגברת קרטן. להיפך, אם $H_K$ תת אלגברת קרטן, אזי $\mathcal{N}_{L_K}\left(H_K\right) = H_K$, אזי

$$\left(\mathcal{N}_L\left(H\right)\right)_K = H_K$$

ומכאן ברור כי

$$\mathcal{N}_L\left(H\right) \subset H$$

ההכלה השנייה נכונה תמיד, ולכן השוויון - ומכאן שגם $H$ תת אלגברת קרטן. ■