רשימת משפטים ללינארית 1 עם סמיון

רשימת משפטים מותרים לשימוש בבחינה לאלגברה לינארית 1א ללומדים עם סמיון

1 הגדרות

1. מערכת הומוגנית:מערכת משוואות שבה וקטור המקדמים החופשיים שווה $\vec{0}$
2. מערכות שקולות:שתי מערכות משוואות שקבוצות הפתרונות שלהן שוות
3. שינויים אלמנטריים:
1.$R_i \leftrightarrow R_j$
2.$R_i \leftarrow \lambda R_i$
3.$R_i \leftarrow R_i + \lambda R_j$
4. מטריצה:$p \times q$ זה מלבן עם p שורות ו־q עמודות
5. איבר פותח בשורה במטריצה: האיבר הראשון בשורה השונה מ0
6. מטריצה מדורגת היא מטריצה ש:
1.כל שורות האפסים אם קיימות נמצאות מתחת לכל השורות שאינן שורות אפסים
2.איבר פותח של כל שורה שאינה שורת אפסים נמצא מימין לכל האיברים הפותחים של השורות שמעליו

במטריצה מדורגת קנונית מתקיים בנוסף:
1.האיבר הפותח בכל שורה שאינה שורת אפסים שווה 1
2.האיבר הפותח הוא האיבר היחיד בעמודה שלו ששונה מ0

7. משתנה שקיים איבר פותח בעמודה שלו נקרא משתנה קשור
משתנה שאינו קשור נקרא משתנה חופשי
8. פתרון טריוואלי: הפתרון $\vec{0}$
9. מרחב R^n :קבוצת כל הn־יות של מספרים ממשיים
10. $(a_1, a_2......a_n)$=$\vec{a}\in R^n$
11. $(a_1+b_1, a_2+b_2.......a_n+b_n) \in R^n$=$\vec{b} \in R^n$+$\vec{a} \in R^n$
12. $(\lambda * a_1, \lambda * a_2......\lambda * a_n) \in R^n$=$\lambda * \vec{a} \in R^n$
13. וקטור האפס: $\vec{0}$
14. וקטור נגדי: $-\vec{a} \in R^n$=$(-a_1, -a_2...... - a_n) \in R^n$
15. תת קבוצה לא ריקה $L \subset R^n$ נקראת תת מרחב לינארי של R^n אם מתקיימים
1. $\forall\ \vec{x}\in L, \forall\lambda\in R \mid \lambda\vec{x}\in L$
2. $\forall\ \vec{y},\vec{x}\in L \mid \vec{y}+\vec{x}\in L$
16. צורה הומוגנית של מערכת משוואות:
מערכת משוואות שזהה לקודמת חוץ מעמודת המקדמים החופשיים שמוחלפת ב$\vec{0}$
17. מכפלה קרטזית של קבוצות:
$X \times Y = \{(x,y) | x\in X, y\in Y\}$

18. מרחב וקטורי מעל R זאת קבוצה V עם שתי פונקציות:
חיבור: $V \times V \longrightarrow V$:f
כפל בסקלר: $R \times V \longrightarrow V$:g
סימון: f(x,y)=x+y
הפונקציות מקיימות: $g(\lambda,x)=\lambda*x$

19. $\forall \lambda \in R$, $\forall \vec{b},\vec{a} \in V$

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

$\vec{c}+(\vec{b}+\vec{a})=(\vec{c}+\vec{b})+\vec{a}$

$\vec{a}=\vec{0}+\vec{a}$

$\vec{0}=\vec{a}+-\vec{a}$

$\lambda\vec{b}+\lambda\vec{a}=\lambda(\vec{b}+\vec{a})$

$\mu\vec{a}+\lambda\vec{a}=(\mu+\lambda)\vec{a}$

$\mu(\lambda\vec{a})=(\mu\lambda)\vec{a}$

$\vec{a}=1\vec{a}$

20. יהי V מרחב וקטורי, תת קבוצה $L \subset V$ נקראת תת מרחב לינארי (וקטורי) אם מתקיימים:
1.L לא קבוצה ריקה
2. $\forall \vec{x} \in L, \forall \lambda \in R \mid \lambda\vec{x} \in L$
3. $\forall \vec{y},\vec{x} \in L \mid \vec{y}+\vec{x} \in L$

21. צירוף לינארי:סכום של וקטורים מתוך מרחב וקטורי V מוכפלים במקדמים-
$\vec{v_1},\vec{v_2},...,\vec{v_s} \in V$ $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_s \in R$ $\lambda_1*\vec{v_1}+\lambda_2*\vec{v_2}+...+\lambda_s*\vec{v_s}$

22. יהיה V מרחב וקטורי ויהיו $x_1, x_2, ..., x_s \in V$:
$L=\text{span}\{x_1, x_2, ..., x_s\}:=\{\lambda_1 * x_1 + \lambda_2 * x_2 + ... + \lambda_s * x_s | \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s \in R\}$
הסדרה $\{x_1, x_2, ..., x_s\}$ נקראת פורשת את L

23. הסדרה $\{x_1, x_2, ..., x_s\}$ נקראת תלויה לינארית אם קיים צירוף לינארי שמקיים $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i \neq 0$ ששווה ל-$\vec{0}$
הסדרה נקראת בלתי תלויה לינארית אם לא קיים צירוף לינארי שמקיים $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i \neq 0$ ששווה ל-$\vec{0}$

24. הבסיס הסטנדרטי של R^n
$\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, e_i=(0,...,0,1,....,0) כשה-1 במקום ה-i

25. תהי סדרת וקטורים V= $\{x_1, x_2, ..., x_s\}$, תת סדרה שלה תוגדר ככל קבוצת וקטורים $\{x_1, x_2, ..., x_r | r \leq s, \forall i \leq r : x_i \in V\}$

26. מרחב וקטורי נקרא נוצר סופית אם קיימת סדרה סופית שפורשת אותו

27. סדרה $x_1, x_2, ..., x_s \in V$ נקראת בסיס של V אם היא בלתי תלויה לינארית ופורשת את V

28. מימד של מרחב וקטורי V הוא כמות האיברים בסדרה בלתי תלויה לינארית הפורשת את V ומסומן dimV

29. יהי V מרחב וקטורי ותהי $x_1, x_2, ..., x_s$ סדרה הפורשת אותו אזי לכל v∈V סדרת המקדמים בהצגה שלו על ידי צירוף לינארי של $x_1, x_2, ..., x_s$ ($\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$) נקראת הקואורדינטות של v ביחס לבסיס $x_1, x_2, ..., x_s$

30. $M_{n\times m}(R)$ קבוצת כל המטריצות בעלות איברים ממשיים ובעלות n שורות ו m עמודות

31. תהי A מטריצה, A_{ij} מוגדר להיות האיבר במטריצה בשורה הi בעמודה הj

32. נתונות A,B∈$M_{n\times m}(R)$ A+B מוגדר: $(A+B)_{ij}$=$A_{ij}+B_{ij}$

33. נתונה A∈$M_{n\times m}(R)$ ו λ ∈R אזי $\lambda * A$ מוגדרת: $(\lambda A)_{ij}$=$\lambda * A_{ij}$

34. A∈$M_{n\times m}(R)$, B∈$M_{m\times p}(R)$ B*A: $\sum_{k=1}^{n} A_{ik} * B_{kj}$ $(A*B)_{ij}$

35. מטריצת היחידה: I_n∈$M_{n\times n}(R)$
$\forall 1 \leq i,j \leq n$ $i=j \rightarrow I_{ij}=1, i\neq j \rightarrow I_{ij}=0$

36. δ :$a=b$ ←δ_{ab}=1, $a\neq b$ ←δ_{ab}=0

37. ניתן לכתוב מערכת משוואות כמשוואה הבאה $A_{n*m} * x_{m,1} = b_{n*1}$ כאשר A מטריצה מקדמים x מטריצת עמודה של משתנים וb מטריצה עמודה של מקדמים חופשיים

38. מטריצה מוחלפת: תהי A∈$M_{n\times m}(R)$ מטריצה, אזי המטריצה המוצמדת המסומנת A^t∈$M_{m\times n}(R)$ מוגדרת: $(A^t)_{ij}=A_{ji}$

39. מטריצה סימטרית:מטריצה ריבועית המקיימת $A^t=A$

40. מטריצה אנטי סימטרית: מטריצה ריבועית המקיימת $A^t=-A$

41. A∈$M_{n\times n}(R)$:
   1. A נקראת הפיכה מימין אם קיימת B∈$M_{n\times n}(R)$ כך ש B*A=I_n
   2. A נקראת הפיכה משמאל אם קיימת B∈$M_{n\times n}(R)$ כך ש A*B=I_n
   3. A נקראת הפיכה אם קיימת B∈$M_{n\times n}(R)$ כך ש A*B=B*A=I_n

42. A∈$M_{n\times n}(R)$ A תקרא מטריצה אלכסונית אם: $\forall 1 \leq i,j \leq n$ $i\neq j \rightarrow A_{ij}=0$

43. מטריצה אלמנטרית: מטריצה המתקבלת מ I על ידי פעולה אלמנטרית אחת

44. תהי φ פעולה אלמנטרית על שורות פעולה אלמנטרית הופכית φ^{-1} מוגדרת כך: $\varphi^{-1}(\varphi(A))=A$

45. A,B∈$M_{n\times n}(R)$ B נקראת שקולת שורות ל A אם ניתן לקבל את B מ A בעזרת מספר פעולות אלמנטריות על שורות

46. תהי A∈$M_{n\times n}(R)$ מטריצה דרגת A היא מימד הspan של שורות של A ומסומנת: rkA

47. הדטרמיננטה היא פונקציה ממרחב המטריצות הריבועיות לR שמקיימת:
1.$det[R_1, ..., \beta R_i, ..., R_n]$+$det[R_1, ..., \alpha R_i, ..., R_n]$=$det[R_1, ..., \alpha R_i+\beta R_i, ..., R_n]$
2.אם למטריצה A שני שורות שוות אז $detA$=0
3.$detI_n$=1

48. מינור: עבור מטריצה A$\in M_{n\times n}(R)$ נסמן ב $M_{ij}(A)$ $(1\leq i,j\leq n)$ מטריצה מגודל $(n-1)$*$(n-1)$ המתקבלת מA על ידי מחיקת השורה ה i והעמודה ה j בA

49. מטריצה משולשית עליונה: מטריצה שבה $\forall i>j.A_{ij}=0$

50. מטריצה משולשית תחתונה: מטריצה שבה $\forall i<j.A_{ij}=0$

51. ון דר מונד: מטריצה A$\in M_{n\times n}(R)$ שמקיימת $\exists x\forall 1\leq i,j\leq n.A_{ij}=(x_i)^{j-1}$

52. A_i:מטריצה המתקבלת מA על ידי החלפת העמודה ה i בעמודת המקדמים החופשיים

53. מטריצה מוצמדת מסומנת $adjA$ ומוגדרת: A$\in M_{n\times n}(R)$ $(adjA)_{ij}=(-1)^{i+j}detM_{ji}A$

54. $\sigma(j_1,....j_n)$ היא תמורה של מספרים מ1 עד n

55. תהי σ תמורה,$1\leq p<q\leq n$ אזי j_p,j_q מהווים סדר אם $j_p<j_q$ ומהווים היפוך אם $j_p>j_q$

56. תהי σ תמורה, הזוגיות של σ מסומנת כsgnσ מוגדרת כ:$(-1)^{\xi}$ $det[e_{j_1},......,e_{j_n}]=$
ξ=מספר ההיפוכים בσ

57. מטריצה A$\in M_{2n\times 2n}(R)$ תקרא מטריצת בלוקים אם היא מורכבת מבלוקים (תתי מטריצות) לדוגמא:
=A
$$\begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}$$

58. שדה: קבוצה F עם שתי פונקציות
חיבור:$\varphi: F\times F\to F$
כפל:$\psi: F\times F\to F$
סימון: $\varphi(x,y)=x+y$ $\psi(x,y)=x*y$
שמקיימות $(\forall a,b,c\in F)$:
1.$a+b=b+a$
2.$(a+b)+c=a+(b+c)$
3.$\exists 0\in$F.$a+0=a$
4.$\exists -a\in$F.$a+(-a)=0$
5.$a*b=b*a$
6.$(a*b)*c=a*(b*c)$
7.$\exists 1\in$F.$1*a=a$
8.$(a+b)*c=a*c+b*c$
9.$\forall a\neq 0\exists a^{-1}\in$F.$a*d=1$
10.$1\neq 0$

59. x שקול מודולו n לy אם $(x-y)$ מתחלק בn סימון: $(x-y)$

60. Z_n שדה מחלקות השקילות של מודולו n כשהכפל והחיבור מוגדרים כרגיל רק שלוקחים מודולו n בסוף הפעולה

61. יהי F שדה כמות האיברים בF מסומנת : |F|

62. יהי F שדה המציין של F המסומן $charF$ הוא המספר המינימלי n המקיים $1+1+$ $1+..1+1+1$ n פעמים =0 אם אין n כזה אז מסומן $charF=0$

63. מרחב וקטורי מעל שדה F הוא בדיוק כמו מרחב וקטורי מעל R כאשר הסקלרים נלקחים מהשדה F

64. תלות לינארית מעל F זהה לתלות לינארית מעל R כאשר הלמבדות נלקחים מהשדה F

65. $span$ של סדרת וקטורים K מעל F מוגדר באופן שקול כחיתוך כל תתי המרחב הלינאריים המכילים את K

66. יהי V מרחב וקטורי מעל F ו$M_1,...M_s\subset V$ תתי מרחב סכומם מוגדר:
$M_1+M_2+.....+M_s=span(M_1\bigcup...\bigcup M_s)$

67. יהי V מרחב וקטורי מעל F ו$M_1,...M_s\subset V$ אזי סכומם יקרא ישר ויסומן $M_1\bigoplus...\bigoplus M_s$ אם ורק אם $M_i\bigcap\sum_{j=1,j\neq i}^{s}M_i=\{\vec{0}\}$

68. יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל F יהי $e_1,...e_s$ בסיס של V לכל v∈V קיימת הצגה יחידה: $v=v_1e_1+....v_se_s$
הסדרה $v_1,...v_s$ נקראת סדרת הקואורדינטות של v ביחס לבסיס $e_1,...e_s$

69. מטריצת מעבר: יהיו שני בסיסים של V-e=$e_1,...e_s$,e'=$e'_1,...e'_s$ אזי לכל וקטור בבסיס e' הצגה יחידה $e'_i=c_{1i}e_1+....c_{si}e_s$ אזי המטריצה C המוגדרת $C_{ij}=c_{ij}$ (העמודה הi היא הקואורדינטות של e'_i לפי הבסיס e)

70. מטריצת וקטורים היא מטריצה שבה כל כניסה היא וקטור ומכפלתה מוגדרת רק כמכפלה במטריצת סקלרים ומתקיימיספ כל החוקים להכפלה רגילה

71. לפי ההגדרה הקודמת ניתן להעתיק את ההגדרה לפניה כך $[e'_1,....,e'_s]=[e_1,......e_s]C$

72. טרנספורמציה לינארית: יהיו U,V מרחבים וקטוריים מעל F טרספורמציה לינארית היא פונקציה:$\varphi:V\to U$ שמקיימת:
1.$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$
2. $\varphi(\lambda x)=\lambda\varphi(x)$

73. תהי φ טרנספורמציה לינארית מV לU אזי φ תיקרא:
מונומורפיזם אם φ חד חד ערכית
אפימורפיזם אם φ היא על U
איזומורפיזם אם φ היא גם חד חד ערכית וגם על U

74. $\varphi:X\to Y$ טרנספורמציה לינארית $Im\varphi=\{y\in Y|\exists x\in X,\varphi(x)=y\}$

75. $\varphi:X\to Y$ טרנספורמציה לינארית $Ker(nel)\varphi=\{x\in X|\varphi(x)=0_Y\}$

76. יהיו V,W מרחבים וקטורים, אזי הם יקראו איזומורפיים אם קיים איזומורפיזם בינהם (יחס זה הוא יחס שקילות)

77. תהי $\varphi:V\to W,dimV=n,dimW=m$ טרנספורמציה לינארית ויהיו $[f]$,$[e]$ בסיסים בV וW בהתאמה אזי המטריצה של φ לפי בסיסים אלו היא מטריצה $A_{m\times n}$ שהעמודה i שלה זאת עמודת הקואורדינטות של $\varphi(e_i)$ לפי $[f]$

78. $L(V,W)=\{\varphi:V\to W|\varphi$ טרנספורמציה לינארית $\}$

79. מרחב דואלי $V^*=L(V,F)$ איבר במרחב דואלי יקרא פונקציונל לינארי

2 משפטים ומסקנות

1. תהי A מטריצה, ניתן להביא אותה לצורה מדורגת קנונית תוך שימוש בפעולות אלמנטריות

2. לכל מערכת משוואות לינארית אחד מהבאים:
0.1 פתרונות
2.פתרון יחיד
3.אינסוף פתרונות

3. אם למערכת יותר משתנים ממשוואות אזי לא יכול להיות לה פתרון יחיד

4. בכל מערכת משוואות הומוגנית יש או פתרון יחיד=הפתרון הטריוואלי או אינסוף פתרונות ובינהם הפתרון הטריוואלי

5. $\forall\lambda\in R$,$\forall\vec{b},\vec{a}\in R^n$
$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
$\vec{c}+(\vec{b}+\vec{a})=(\vec{c}+\vec{b})+\vec{a}$
$\vec{a}=\vec{0}+\vec{a}$
$\vec{0}=\vec{a}+-\vec{a}$
$\lambda\vec{b}+\lambda\vec{a}=\lambda(\vec{b}+\vec{a})$
$\mu\vec{a}+\lambda\vec{a}=(\mu+\lambda)\vec{a}$
$\mu(\lambda\vec{a})=(\mu\lambda)\vec{a}$
$\vec{a}=1\vec{a}$

6. במערכת הומוגנית סכום של 2 פתרונות וכפל פתרון כלשהו בסקלר הם גם פתרונות (קבוצת הפתרונות של מערכת הומוגנית היא תת מרחב לינארי של R^n)

7. קבוצת הפתרונות של מערכת משוואות כללית היא:
$\{\vec{c_0}+\vec{v}|$ המערכת של פתרון $\vec{c_0}\in R^n$, פתרון של המערכת בצורתה ההומוגנית $\vec{v}\in R^n\}$

8. $R^{[a,b]}$ עם הפעולות של חיבור וכפל בסקלרים (הסטנרדטיות) זה מרחב וקטורי

9. עכשיו יבואו הרבה משפטים למרחבים וקטוריים:
1.$b+c=a+b\longrightarrow b=c$
2.האיבר הנייטרלי ביחס לחיבור הוא יחיד
3.לכל $v\in V$ הנגדי שלו הוא יחיד
4.$\lambda*\vec{0}=\vec{0}$ $\lambda\in R$
5.$0*\vec{v}=\vec{v}$ $v\in V$
6.$\lambda*\vec{v}=\vec{0} \leftrightarrow \lambda=0 \bigvee \vec{v}=\vec{0}$
7.$-1*\vec{v}=-\vec{v}$ $v\in V$

10. יהי V מרחב וקטורי $L\subset V$ אזי:
1.$\vec{0}\in L$
2.$\forall\vec{v}\in L \mid -\vec{v}\in L$
3.כל צירוף לינארי של וקטורים מL שייך לL

11. יהי V מרחב וקטורי תהי $\{L_\alpha|\alpha \in A\}$=S משפחה של תתי מרחב לינאריים אזי S⊂V$\bigcap$ תת מרחב לינארי

12. span$\{x_1, x_2, ..., x_s\}$ תמיד תת מרחב לינארי (הוא גם נקרא תת מקחב שנפרס על ידי $\{x_1, x_2, ..., x_s\}$)

13. כל סדרת וקטורים המכילה את $\vec{0}$ היא תלויה לינארית

14. כל סדרת וקטורים המכילה את אותו וקטור פעמיים היא תלויה לינארית

15. אם סדרה $\{x_1, x_2, ..., x_s\}$ בלתי תלויה לינארית אזי כל תת סדרה שלה בלתי תלויה לינארית, ההיפך לא בהכרח נכון

16. סדרה בת וקטור אחד תלויה לינארית אם ורק אם הוקטור שווה ל$\vec{0}$

17. סדרה בת שתי וקטורים תלויה לינארית אם ורק שני הוקטורים פרופורציוניים

18. נניח V מרחב וקטורי שנפרש על ידי סדרת וקטורים בגודל n אזי כל סדרה בלתי תלויה לינארית ב־V היא בת לכל היותר n וקטורים

19. 1.בכל מרחב וקטורי V נוצר סופית קיים בסיס וכל בסדרה בלתי תלויה לינארית ניתן להשלים עד לבסיס
2.בכל מרחב וקטורי V לכל הבסיסים אותו מספר איברים
3.בכל מרחב וקטורי V כל סדרה)סופית(ניתן לצמצם עד לבסיס

20. נניח $\vec{y}$∈span$\{x_1, x_2, ..., x_s\}$ אזי span$\{x_1, x_2, ..., x_s\}$=span$\{x_1, x_2, ..., x_s, y\}$

21. יהי V מרחב וקטוי נוצר סופית dimV=n
1.כל סדרה בת n איברים שהיא בלתי תלויה לינארית היא גם בסיס של V
2.כל סדרה בת n איברים שהיא פורשת את V היא גם בסיס של V

22. יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית ,אזי כל תת מרחב לינארי $W \subset V$ גם נוצר סופית

23. יהי V מרחב וקטורי ותהי $x_1, x_2, ..., x_s$ סדרה הפורשת אותו, אזי לכל v∈V קיימת הצגה על ידי צירוף לינארי של $x_1, x_2, ..., x_s$ והיא יחידה

24. $M_{n\times m}(R)$ ביחד עם פעולות החיבור וכפל הסטנדרטיות של מטריצות הוא מרחב וקטורי

25. dim$M_{n\times m}(R)$=m*n

26. כפל מטריצות הוא לא קומוטטבי

27. כפל מטריצות הוא דיסטריבוטיבי מימין ומשמאל ואסוציאטיבי

28. תהי A∈$M_{n\times m}(R)$
1.$I_n * A = A$
2.$A * I_m = A$

29. δ_{ij}=$(I_n)_{ij}$

30. $(A^t)^t = A$.1
$(\lambda A)^t = \lambda A^t$.2
$(A+B)^t = A^t + B^t$.3
$(A*B)^t = B^t * A^t$.4

31. A∈$M_{n\times n}(R)$ אם A הפיכה מימין או הפיכה משמאל אז A הפיכה

32. A∈$M_{n\times n}(R)$ אם A הפיכה אז ההופכית שלה היא יחידה ומסומנת: A^{-1}

33. A∈$M_{n\times n}(R)$ אם לA עמודת אפסים או שורת אפסים אזי A לא הפיכה

34. נתונה מערכת משוואות לינארית A*x=b $M_{n\times n}(R)$∋A אם A הפיכה קיים למערכת פתרון יחיד והוא A^{-1}*b

35. A∈$M_{n\times n}(R)$ תהי A הפיכה אזי:
A^{-1}.1 הפיכה ו $(A^{-1})^{-1} = A$
A^t.2 הפיכה ו $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
3. B∈$M_{n\times n}(R)$ הפיכה אזי A*B הפיכה ו $(A*B)^{-1} = B^{-1} * A^{-1}$

36. A∈$M_{n\times n}(R)$ אלכסונית אזי A הפיכה אם ורק אם $\forall 1 \leq i,j \leq n\ i=j \rightarrow A_{ij} \neq 0$

37. תהי φ פעולה אלמנטרית על השורות אזי $\varphi(A)$=$\varphi(I) * A$

38. תהי ψ פעולה אלמנטרית על העמודות אזי $\psi(A) = A * \psi(I)$

39. יהיו $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k$ פעולות אלמנטריות אזי:
$\varphi_1(\varphi_2(.....\varphi_k(A)) = \varphi_1(I) * \varphi_2(I)..... * \varphi_k(I) * A$

40. $\varphi^{-1}(\varphi(A)) = \varphi(\varphi^{-1}(A)) = A$

41. כל מטריצה אלמנטרית היא הפיכה וההופכית שלה היא גם מטריצה אלמנטרית

42. A,B∈$M_{n\times n}(R)$ נניח A הפיכה אזי B הפיכה אם ורק אם A*B הפיכה

43. כל מטריצה A ניתן להציג A=$\varphi_k(I)...\varphi_2(I)\varphi_1(I)B$ כשB מטריצה מדורגת קנונית

44. A,B∈$M_{n\times n}(R)$ אם A*B=I_n אזי B*A=I_n

45. A∈$M_{n\times n}(R)$ A הפיכה אם ורק אם צורתה המדורגת קנונית היא I_n והשיטה למציאת הפיכה היא להוסיף את I_n מימין לA ולדרג את שניהם ביחד, אם מדרגים את A ומגיעים לI_n אז המטריצה שנוצרה מ I_n היא ההופכית של A אחרת A לא הפיכה

46. 1. שקילות שורות הוא יחס שקילות

47. A∈$M_{n\times n}(R)$ הטענות הבאות שקולות:
A.1 הפיכה
2. קיים b∈R^n למערכת הלינארית A*x=b פתרון יחיד
3. A שקולת שורות לI_n
4. השורות של A בלתי תלויות לינארית
5. העמודות של A בלתי תלויות לינארית

48. A∈$M_{n\times n}(R)$ rkA $\leq$0 ו0=rkA אם ורק אם A=0

49. n=rkI_n

50. rkA$\leq$min$\{$n,m$\}$ A$\in M_{m\times n}(R)$

51. A$\in M_{m\times n}(R)$ n=rkA אם ורק אם A הפיכה

52. rkA^t=rkA

53. לכל המטריצות השקולות שורה אותה דרגה

54. דרגת מטריצה מדורגת (לאו דווקא קנונית) שווה למספר השורות

55. דרגת מטריצה לא משתנה עם פעולות אלמנטריות על שורות או עמודות

56. min$\{$A,B$\}$ $\geq$rk(A*B)

57. A$\in M_{m\times n}(R)$ λ^n*$detA$=$det(\lambda A)$

58. לכל מטריצה הדטרמיננטה היא יחידה

59. השינויים בדרמיננטה בעקבות הפעלת פעולות אלמנטריות:
    1. $\varphi: R_i \leftrightarrow R_j$ $-detA$=$det\varphi(A)$
    2. $\varphi: R_i \leftarrow \lambda R_i$ $\lambda * detA$=$det\varphi(A)$
    3. $\varphi: R_i \leftarrow R_i + \lambda R_j$ $detA$=$det\varphi(A)$

60. A$\in M_{2\times 2}(R)$ $detA$=$A_{11} * A_{22} - A_{21} * A_{12}$

61. A,B$\in M_{n\times n}(R)$ $det(A*B) = detA * detB$

62. פיתוח לפי שורה:$1 \leq i \leq n$ $detA = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+i}A_{ij} * detM_{ij}(A)$

63. פיתוח לפי עמודה:$1 \leq j \leq n$ $detA = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}A_{ij} * detM_{ij}(A)$

64. $detA = 0$ אם ורק אם A לא הפיכה

65. $detA^t = detA$

66. A$\in M_{3\times 3}(R)$
$detA = (A_{11}A_{22}A_{33}+A_{12}A_{23}A_{31}+A_{13}A_{21}A_{32})-(A_{13}A_{22}A_{31}+A_{11}A_{23}A_{32}+A_{12}A_{21}A_{33})$

67. A$\in M_{n\times n}(R)$ משולשית כך ש $\forall 1 \leq i \leq n . A_{ii} = \lambda_i$ $detA = \prod_{i=1}^{n}\lambda_i$

68. A$\in M_{n\times n}(R)$ מטריצת ון דר מונד $detA = \prod_{j=1}^{n}\prod_{i=j+1}^{n}(x_i - x_j)$ מספר הגורמים שווה $\binom{n}{2}$

69. נתונה מערכת משוואות Ax=b נניח A הפיכה אז קיים פתרון יחיד x=$[c_1, c_2, ...c_n]$ כש $c_i = \frac{detA_i}{detA}$

70. $adjA * A = A * adjA = detA * I_n$

71. A$\in M_{n\times n}(R)$ נניח A הפיכה אזי $A^{-1} = \frac{1}{detA} * adjA$

72. $detA = \sum_{\sigma} sgn\sigma * a_{1\sigma(1)} * ... * a_{n\sigma(n)}$

73. A$\in M_{2n\times 2n}(R)$
=A
$$\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$
אזי $detA = detB * detC$

74. יהי F שדה $(\forall a \in F)$:
1. האיבר נייטרלי ביחס לחיבור הוא יחיד
2. האיבר נייטרלי ביחס לכפל הוא יחיד
3. לכל a האיבר הנגדי של a הוא יחיד
4. לכל a האיבר ההופכי של a הוא יחיד
5. $a+b=a+c \rightarrow b=c$
6. $a*0=0$
7. $(-1)*a=-a$
8. $a*b=0 \rightarrow a=0 \vee b=0$
9. $a \neq 0 \wedge a*b=a*c \rightarrow b=c$

75. שקילות מודולו n היא יחס שקילות וכל הנובע מכך (המחלקות זרות וכו..)

76. n=$|Z_n|$

77. Z_n מקיים את כל אקסיומות השדה אם ורק אם n ראשוני

78. יהי F שדה אזי $charF$ הוא 0 או מספר ראשוני

79. יהי F שדה אם בF מספר סופי של איברים אזי $charF \neq 0$

80. יהי F שדה ו$charF=p$ אזי $r \in N|F|=p^r$

81. יהי p ראשוני אזי לכל $r \in N$ קיים שדה בין p^r איברים

82. תהי K סדרת וקטורים מעל F
1. $K \subset spanK$
2. $K_1 \subset K_2 \rightarrow spanK_1 \subset spanK_2$
3. אם L תת מרחב לינארי אזי $spanL=L$
4. אם L תת מרחב לינארי ו$K \subset L$ אזי $spanK \subset L$

83. $M_1+...+M_s=\{x_1+....+x_s|x_1 \in M_1,...,x_s \in M_s\}$

84. יהי V מרחב וקטורי ויהיו $M_1,M_2 \subset V$ תתי מרחבים נוצרים סופית אזי $M_1 \bigcap M_2, M_1+$ M_2 גם נוצרים סופית ו:
$dim(M_1+M_2)=dimM_1+dimM_2-dim(M_1 \bigcap M_2)$

85. יהי V מרחב וקטורי מעל F ו$M_1,...M_s \subset V$ כך ש $\sum_{i=1}^{s} M_i=V$ אזי הדברים הבאים שקולים:
1. $M_1 \bigoplus .... \bigoplus M_s$ סכום ישר
2. לכל v$\in$V קיימת הצגה יחידה $v=m_1+....m_s$ כך שלכל i $m_i \in M_i$
3. קיים וקטור בV שהצגתו בשיטה מ2 יחידה
4. אם $0=m_1+....m_s$ אז לכל i $m_i=0$
5. הבסיס של V הוא איחוד הבסיסים של הMים
6. $dimV=dimM_1+...+dimM_s$

86. לכל קבוצת תתי מרחבים מימד סכומם קטן או שווה לסכום מימדיהם

87. אם $v_1, ..., v_s$ סדרה בלתי תלויה לינארית ו$[v]$ מטריצת וקטורים שאיבריה הם וקטורי הסדרה , וA מטריצת סקלרים אזי:
$[v]A = [0, ..., 0] \to A = 0$

88. אם e ו e' שני בסיסים של מרחב וקטורי כלשהו ו$[e'] = [e]T$ אזי T היא מטריצת המעבר מe לe'

89. אם e,'e,e" בסיסים וC מטריצת מעבר מe לe' וD מטריצת מעבר מe' לe" אזי CD מעבר מe ל e"

90. תהי C מטריצת מעבר מe לe' אזי C הפיכה וC^{-1} מעבר מe' לe

91. יהי x וקטור במרחב וקטורי V ושני בסיסים e ו e' כך ש C מטריצת מעבר מe לe'
$x = x_1e_1 + ... + x_se_s$,$x = x_1'e_1' + ... + x_s'e_s'$ אזי $[x_1, ..., x_s]^t = C[x_1', ...x_s']^t$

92. תהי φ טרנספורמציה לינארית אזי:
1. $\varphi(0_V) = 0_U$
2. $\varphi(-x) = -\varphi(x)$
3. $\varphi(\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_s x_s) = \lambda_1\varphi(x_1) + ... + \lambda_s\varphi(x_s)$

93. הרכבה של שתי טרנספורמציות לינאריות היא טרספורמציה לינארית ואם שתיהן מאותו סוג (אפימורפיזם,מונומורפיזם,איזומורפיזם) אזי הרכבתן היא מאותו סוג

94. אם סדרה היא בלתי תלויה לינארית אזי סדרת התמונות של איבריה היא לאו דווקא בלתי תלויה לינארית

95. אם סדרה היא תלויה לינארית אזי סדרת התמונות של איבריה היא תלויה לינארית

96. $\varphi : X \to Y$ טרנספורמציה לינארית אם φ איזומורפיזם אזי היא הפיכה וφ^{-1} היא גם טרנספורמציה לינארית והיא גם איזומורפיזם

97. $\varphi : X \to Y$ טרנספורמציה לינארית $Im\varphi$ הוא תת מרחב לינארי ו$Ker\varphi$ הוא תת מרחב לינארי

98. $\varphi : X \to Y$ טרנספורמציה לינארית אזי φ מונומורפיזם אם ורק אם $Ker\varphi = \{0_X\}$

99. נוסחת המימד: תהי $\varphi : V \to W$ טרנספורמציה לינארית, אזי:
$dimIm\varphi + dimKer\varphi = dimV$

100. נוסחת המימד: תהי $\varphi : V \to W$ טרנספורמציה לינארית, ומתקיים $dimV = dimW$ אזי שלושת הדברים הבאים שקולים:
1.φ אפימורפיזם
2.φ מונומורפיזם
3.φ איזומורפיזם

101. יהיו V, W מרחבים וקטוריים אזי V איזומורפי לW אם ורק אם $dimV = dimW$
מסקנה מהמשפט: כל מרחב וקטורי ממימד n איזומורפי לF^n

102. תהי $\varphi : V \to W$ טרנספורמציה לינארית,יהיו $[e]$,$[f]$ בסיסים ותהי A מטריצה של φ לפי בסיסים אלו אזי :
$\forall x = x_1e_1 + ...x_ne_n, \varphi(x) = y_1f_1 + ...y_mf_m.[y_1, ..., y_n]^t = A[x_1, ...x_n]^t$

103. תהי $\varphi : V \to W$ טרנספורמציה לינארית ויהיו $[e], [e']$ בסיסים של V כשC מטריצה מעבר מ$[e]$ ל $[e']$ ויהיו $[f], [f']$ בסיסים של W כשB מטריצה מעבר מ$[f]$ ל $[f']$ וA מטריצה של φ ביחס ל$[e], [f]$ וA' מטריצה של φ לפי $[e'], [f']$ אז מתקיים:
$A^{-1} = B^{-1}AC$

104. הפונקציה ממרחב הטרנספורמציות הלינאריות ביןV לW למרחב המטריצות בגודל $m \times n$ היא איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים

105. $L(V, W)$ מרחב וקטורי עם הפעולות $(\varphi_1 + \varphi_2)(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$, $(\lambda\varphi)(x) = \lambda\varphi(x)$

106. יהיו $\varphi_1, \varphi_2 : V \to W$ טרנספורמציות לינאריות ויהיו $A_\varphi, A\psi$ המטריצות שלהן לפי אותם בסיסים אזי $A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$,$A_{\lambda\varphi} = \lambda A_\varphi$

107. $dimL(V, W) = dimV * dimW$

108. יהיו $\varphi : V \to W, \psi : W \to U$ ויהיו $[e]$,$[f]$,$[b]$ בסיסים בV,W,U בהתאמה ונסמן A_φ את המטריצה של φ לפי בסיסים אלו ו A_ψ את המטריצה של ψ לפי בסיסים אלו אזי מטריצת ההרכבת $A_{\psi\circ\varphi}$ מקיימת $A_{\psi\circ\varphi} = A_\psi * A_\varphi$

109. תהי $\varphi : V \to W$ טרנספורמציה לינארית ותהי A מטריצה של φ לפי בסיסים כלשהם אזי מתקיים $rkA = dimIm\varphi$

110. $dimV^* = dimV$

111. כל פונקציונל לינארי f על F^n הוא מהצורה $f((x_1, ...x_n)) = a_1x_1 + ... + a_nx_n$ וכל וקטור a כזה מוגדר באופן יחיד על ידי הפונקציונל
meti יהי $[e]$ בסיס של V נגדיר $[\varepsilon]$ מתוך V^* כך ש$\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij}$ אזי $[\varepsilon]$ בסיס של V^* ומתקיים $\forall\varphi \in V^*.\varphi = \varphi(e_1)\varepsilon_1 + ... + \varphi(e_n)\varepsilon_n$