אלגברה לינארית 2א

© ארזים

3 במאי 2016

1 מרחבי מכפלה פנימית

בפרק הזה (כלומר עד סוף הקורס) השדה $\mathbb{F}$ מעליו עובדים הוא תמיד $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$. עד כמה שאפשר נשתדל לעבוד סימולטנית מעל שניהם. לפעמים נצטרך להבדיל ביניהם קצת (ההבדל לא יהיה מהותי בדרך כלל).

נגדיר מרחב מכפלה פנימית, ונתחיל במקרה של $\mathbb{R}$.

הגדרה 1.1 יהי $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{F}$ הינו מרחב וקטורי V מעל $\mathbb{F}$, ועליו תבנית בי־לינארית סימטרית שהיא מוגדרת חיובית (או חיוביות לחלוטין), שמסומנת $B(v,u) = \langle v,u \rangle$. זאת אומרת, לכל זוג וקטורים $u,v \in V$ קיים סקלר $\langle v,u \rangle \in \mathbb{F}$, כך שמתקיים שהיא סימטרית, כלומר $\langle v,u \rangle = \langle u,v \rangle$; היא לינארית בכל אחד מהרכיבים לחוד; וחיובית, כלומר לכל $v \neq 0$ מתקיים $\langle v,v \rangle > 0$.

דוגמאות

1. על $\mathbb{R}^n$ מוגדרת המכפלה הפנימית הסטנדרטית:

$$\begin{aligned} v &= \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\ \langle u,v \rangle &= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \end{aligned}$$

2. $V = M_n(\mathbb{R})$, נגדיר

$$\langle A,B \rangle = \mathrm{tr}\left(A \cdot B^t\right)$$

הלינאריות ברורה, והסימטריה קלה (עקבה של שחלוף של מטריצה שווה לעקבה של המטריצה המקורית), וחיוביות נובעת מחישוב ישיר:

$$\langle A,A \rangle = \mathrm{tr}\left(A \cdot A^t\right) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^2$$

3. $V=C\left[0,1\right]$ - מרחב הפונקציות הרציפות על $\left[0,1\right]$, נגדיר

$$\left\langle f,g\right\rangle =\int\limits_{0}^{1}f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)\,\mathrm{d}x$$

אי אפשר לשמור על תכונת החיוביות כשעובדים מעל $\mathbb{C}$ אם מתעקשים על לינאריות מלאה: אם $\left\langle v,v\right\rangle >0$ אזי $\left\langle iv,iv\right\rangle =i^{2}\left\langle v,v\right\rangle =-\left\langle v,v\right\rangle <0$. קריטי לנו בכל זאת לשמור על תכונת החיוביות, ולכן נקריב משהו בתכונות הלינאריות והסימטריה.

הגדרה 1.2 יהי $\mathbb{F}=\mathbb{C}$. מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{F}$ הוא מרחב ווקטורי V, כאשר לכל $v,u\in V$ מוגדר סקלר $\left\langle v,u\right\rangle \in\mathbb{F}$ כך שמתקיים:

1.

$$\begin{aligned}
\forall v,u_{1},u_{2} & \in V\quad\left\langle v,u_{1}+u_{2}\right\rangle =\left\langle v,u_{1}\right\rangle +\left\langle v,u_{2}\right\rangle \\
\forall v_{1},v_{2},u & \in V\quad\left\langle v_{1}+v_{2},u\right\rangle =\left\langle v_{1},u\right\rangle +\left\langle v_{2},u\right\rangle \\
\forall v,u\in V,\forall t & \in\mathbb{F}\quad\left\langle tv,u\right\rangle =t\left\langle v,u\right\rangle \\
\forall v,u\in V,\forall t & \in\mathbb{F}\quad\left\langle v,tu\right\rangle =\bar{t}\left\langle v,u\right\rangle
\end{aligned}$$

2. $\forall v,u\in V\quad\left\langle v,u\right\rangle =\overline{\left\langle u,v\right\rangle }$ (סימטריה מרוכבת)
3. חיוביות באותו מובן כמו קודם, כלומר $\forall v\in V\quad\left\langle v,v\right\rangle >0$, כלומר זהו מספר ממשי וחיובי (הממשיות נובעת מתכונה 2).

הגדרה אלטרנטיבית ושקולה:

1. $\left\langle v,u\right\rangle$ לינארית במובן הרגיל ברכיב השמאלי.
2. $\left\langle v,u\right\rangle =\overline{\left\langle u,v\right\rangle }$.
3. $\left\langle v,v\right\rangle >0$ אם $v\neq0$.

הגדרה זו תופסת גם את ההגדרה עבור $\mathbb{R}$, שכן התכונה השנייה עבור הממשיים משמעה סימטריה רגילה.

דוגמה המכפלה הפנימית הסטנדרטית על $\mathbb{C}^{n}$, בסימונים שהשתמנו בהם בדוגמה על $\mathbb{R}^{n}$, תהיה

$$\begin{aligned}
\left\langle v,u\right\rangle & = \sum_{i=1}^{n}a_{i}\overline{b_{i}}\\
\left\langle u,v\right\rangle & = \sum_{i=1}^{n}b_{i}\overline{a_{i}}=\overline{\sum_{i=1}^{n}a_{i}\overline{b_{i}}}=\overline{\left\langle v,u\right\rangle }\\
\left\langle v,v\right\rangle & = \sum_{i=1}^{n}a_{i}\overline{a_{i}}=\sum_{i=1}^{n}\left|a_{i}\right|^{2}>0
\end{aligned}$$

הגדרה 1.3 יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. אזי לכל $v \in V$ מגדירים את הנורמה של v, $||v||$, על ידי $||v|| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ (השורש הממשי האי־שלילי).

מהחיוביות נובע כי $v = 0 \iff ||v|| = 0$, ואחרת $||v|| > 0$. הנורמה היא למעשה "אורך של וקטור" במרחב מכפלה פנימית.

למשל, במכפלה הפנימית הסטדנרטית שראינו על $\mathbb{R}^n$, הנורמה היא האורך האוקלידי הרגיל של v. למשל, עבור $\mathbb{R}^3$,

$$||v|| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$