<u>אלגברה לינארית 2א</u>

ⓒ ארזים

5 במאי 2016

סיימנו את השיעור הקודם בהגדרת הנורמה:

$$||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

מושג זה מתאחד עם המושג הרגיל של אורך במרחב $\mathbb{R}^n$, כאשר $\langle , \rangle$ המכפלה הפנימית הסטנדרטית. נורמות של וקטורים במרחב ישתנו אם נשנה את המכפלה הפנימית.

טענה 0.1

$$\forall t \in \mathbb{F}, \forall v \in V \quad ||tv|| = |t|\,||v||$$

הוכחה:

$$||tv|| = \sqrt{||tv||^2} = \sqrt{\langle tv, tv\rangle} = \sqrt{t \cdot \bar{t} \cdot \langle v, v\rangle} = \sqrt{|t|^2\,||v||^2} = |t|\,||v||$$

■

משפט 0.2 (אי שוויון קושי שוורץ)

$$\forall u, v \in V \quad |\langle v, u\rangle| \leq ||v|| \cdot ||u||$$

ושוויון מתקיים אם ורק אם הווקטורים תלויים לינארית.

הוכחה: בלי הגבלת הכלליות, נוכל להניח ששני הווקטורים שונים מאפס, כי אחרת שני האגפים שווים אפס ואין מה להוכיח. ניקח t כך שמתקיים

$$\begin{aligned} \langle v, u\rangle - t\,\langle u, u\rangle &= 0 \\ \langle v, u\rangle &= t\,||u||^2 \\ t &= \frac{\langle v, u\rangle}{||u||^2} \end{aligned}$$

השורה האחרונה נכונה כי הנחנו $u \neq 0$.

עבור t זה נשתמש בחיוביות הביטוי

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle v-tu,v-tu\rangle=\langle v-tu,v\rangle-\langle v-tu,tu\rangle=\langle v-tu,v\rangle-\bar{t}\cdot\langle v-tu,u\rangle=\langle v-tu,v\rangle= \\ &= \langle v,v\rangle-t\cdot\langle u,v\rangle=||v||^2-\frac{\langle v,u\rangle\cdot\langle u,v\rangle}{||u||^2}=||v||^2-\frac{|\langle v,u\rangle|^2}{||u||^2} \\ |\langle v,u\rangle|^2 &\leq ||v||^2\,||u||^2\Rightarrow|\langle v,u\rangle|\leq||v||\,||u|| \end{aligned}$$

ובכך הוכחנו את אי השוויון. שוויון מתקבל בדיוק כאשר $\langle v-tu,v-tu\rangle=0$, וזה גורר, מאקסיומת החיוביות של מכפלה פנימית, שמתקיים $v-tu=0$, כלומר $v=tu$. כלומר, v,u בלתי־תלויים. בכיוון השני, אם מתקיים $v=su$, אז אפשר לבדוק בקלות שהשוויון מתקיים. ■

משפט 0.3 (אי שוויון המשולש)

$$\forall u,v\in V\quad ||v+u||\leq||v||+||u||$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} ||v+u|| &= \sqrt{||v+u||^2}=\sqrt{||v||^2+\langle u,v\rangle+\langle v,u\rangle+||u||^2}=\sqrt{||v||^2+2\mathrm{Re}\left(\langle v,u\rangle\right)+||u||^2} \\ ||v||+||u|| &= \sqrt{(||u||+||v||)^2}=\sqrt{||v||^2+2\,||u||\,||v||+||u||^2} \end{aligned}$$

לכן אי שוויון המשולש שקול לאי שוויון

$$\mathrm{Re}\left(\langle v,u\rangle\right)\leq||u||\,||v||$$

אבל לכל מספר מרוכב מתקיים

$$\mathrm{Re}\left(z\right)\leq|z|$$

ולכן מאי שוויון קושי שוורץ,

$$\mathrm{Re}\left(\langle v,u\rangle\right)\leq|\langle v,u\rangle|\leq||u||\,||v||$$

והוכחנו את אי השוויון. כעת, עבור שוויון, חייב להתקיים שוויון באי שוויון קושי שוורץ, כלומר אחד הווקטורים הוא כפולה בסקלר של השני, וכן חייב להתקיים שוויון באי השוויון השני שהשתמשנו בו, כלומר $\mathrm{Re}\left(\langle v,u\rangle\right)\leq|\langle v,u\rangle|$. לכן, $0\leq\langle v,u\rangle\in\mathbb{R}$, אחרת הדבר לא אפשרי, וכעת מתקיים $v=tu$, ולכן $\langle v,u\rangle=\langle tu,u\rangle=t\,||u||^2$, ומתקיים $0\leq||u||^2\in\mathbb{R}$, ולכן גם $0\leq t\in\mathbb{R}$. ■

הנורמה על מרחב מכפלה פנימית מאפשרת לנו להגדיר "מרחק" בין כל שני ווקטורים בדיוק כמו במקרה הרגיל של $\mathbb{R}^n$ -

$$d\left(u,v\right) \coloneqq ||v-u||$$

d תקיים כעת את אי־שוויון המשולש:

$$d\left(v,w\right)+d\left(w,u\right)=||v-w||+||w-u||\geq||v-w+w-u||=||v-u||=d\left(v,u\right)$$

במרחב מכפלה פנימית כללי ניתן להגדיר את הזווית θ בין שני ווקטורים u,v על ידי

$$\cos\theta \coloneqq \frac{|\langle u,v\rangle|}{||u||\,||v||}$$

אי שוויון קושי שוורץ מבטיח $\mathbb{R}\ni|\cos\theta|\leq1$.

הגדרה 0.4 שני ווקטורים $v,u\in V$ נקראים <u>ניצבים</u> או <u>אורתוגונליים</u> אם $\langle v,u\rangle=0$. נסמן $u\perp v$. מושג הניצבות הוא סימטרי (גם מעל $\mathbb{C}$):

$$\langle u,v\rangle=\overline{\langle v,u\rangle}=0\Leftarrow\langle v,u\rangle=0$$

למשל, הנציבות הרגילה במרחב $\mathbb{R}^n$ נובעת מהמכפלה הפנימית הסטנדרטית. כמו כן, מהחיוביות, אם ווקטור ניצב לעצמו אזי הוא אפס.

משפט 0.5 (פיתגורס) אם $u\perp v$ אזי

$$||u+v||^2=||u||^2+||v||^2$$

כמובן, באינדוקציה נקבל, עבור $v_1,\ldots,v_n$ שכולם ניצבים בזוגות, שמתקיים

$$\left|\left|\sum_{i=1}^{n}v_i\right|\right|^2=\sum_{i=1}^{n}||v_i||^2$$

הוכחה:

$$||v+u||^2=\langle v+u,v+u\rangle=||v||^2+||u||^2+\langle v,u\rangle+\langle u,v\rangle=||v||^2+||u||^2$$

■

כדי להוכיח את המקרה הכללי באינדוקציה, צריך את הטענה הבסיסית הבאה:

טענה 0.6 אם v ניצב לוקטורים $u_1,\ldots,u_k$ אזי הוא ניצב לכל צירוף לינארי שלהם.

הוכחה:

$$\left\langle v,\sum_{i=1}^{k}a_iu_i\right\rangle=\sum_{i=1}^{k}\overline{a_i}\left\langle v,u_i\right\rangle=0$$

■

בעיה נתון לנו ווקטור $v\in V$ ונתון תת־מרחב $U\subseteq V$. נרצה למצוא את הווקטור $u\in U$ שהוא הכי קרוב לווקטור v. כלומר, מחפשים את הווקטור $u\in U$ שמביא למינימום את $\{||u-v||\mid u\in U\}$.

משפט 0.7 תמיד קיים $u\in U$ כך שהמרחק שלו מהווקטור v מינימלי. הוא יחיד, ומאופיין בכך שזהו הווקטור $u\in U$ היחיד כך שהווקטור $v-u$ ניצב לכל איברי U.

הוכחה: נוכיח ראשית שקיים לכל היותר u אחד עבורו $v-u$ ניצב לכל המרחב U. אכן, אם ישנם שניים, $v-u_1\perp U, v-u_2\perp U$, ולכן ברור שמתקיים גם $U\ni u_2-u_1=(v-u_1)-(v-u_2)\perp U$, ולכן $u_2-u_1\perp u_2-u_1$, לכן $u_2-u_1=0$. כעת, נניח שקיים u כזה ונוכיח שהוא מקיים את דרישת המינימליות. יהי $w\in U$ ווקטור אחר. ידוע שמתקיים $u-w\perp v-u$, ולכן $v-w=(v-u)+(u-w)$, כשאגף ימין הוא סכום של שני ווקטורים ניצבים, ולכן

$$||v-w||^2=||v-u||^2+||u-w||^2\geq||v-u||^2$$

ולכן קיבלנו את המינימליות. נותר רק להוכיח שקיים ווקטור כזה. לשם כך, נתקדם בחומר ונחזור לכך. ■

הגדרה 0.8 קבוצת ווקטורים $\{e_i\}\subseteq V$ נקראת <u>אורתוגונלית</u> אם $e_i\perp e_j$ לכל $i\neq j$, ונקראת <u>אורתונורמלית</u> אם בנוסף מתקיים $||e_i||=1$ לכל i.

הערה 0.9 אם $\{e_i\}$ אורתוגונלית וכל הווקטורים בה שונים מאפס, ניתן לנרמל אותם ולקבל קבוצה אורתונורמלית. נרמול של ווקטור $v\neq 0$: $v\to\frac{v}{||v||}$.

טענה 0.10 תהי $\{e_i\}$ קבוצה אורתונורמלית, ויהי $v\in V$.

1. אם $v=\sum a_ie_i$, אזי $a_i=\langle v,e_i\rangle$.
2. הווקטור $w=v-\sum\langle v,e_i\rangle\cdot e_i$ הוא ניצב לכל אחד מבין e_i, ולכן גם לכל ווקטור בתת־המרחב הנפרש על ידם.
3. w זה מקיים $||w||^2=||v||^2-\sum|\langle v,e_i\rangle|^2$.

הוכחה: בסעיפים:

1. אם $v=\sum a_iv_i$, אזי

$$\left\langle v,e_i\right\rangle=\left\langle\sum_j a_je_j,e_i\right\rangle=\sum_j a_j\left\langle e_j,e_i\right\rangle=a_i\left\langle e_i,e_i\right\rangle=a_i$$

2. בודקים ישירות:

$$\langle w,e_j\rangle=\left\langle v-\sum_i\langle v,e_i\rangle\cdot e_i,e_j\right\rangle=\langle v,e_j\rangle-\sum_i\langle v,e_i\rangle\langle e_i,e_j\rangle=\langle v,e_j\rangle-\sum_i\langle v,e_i\rangle\delta_{i,j}=\langle v,e_j\rangle-\langle v,e_j\rangle=0$$

נזכיר את הגדרת סימן קרונקר:

$$\delta_{i,j}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

3. נובע ישירות ממשפט פיתגורס:

$$v=w+\sum_i\langle v,e_i\rangle\cdot e_i$$

וידוע כי $e_i \perp w$ לכל i, וכמובן e_i ניצבים ביניהם. לכן נשתמש בהכללה האינדוקטיבית של משפט פיתגורס:

$$||v||^2=||w||^2+\sum_i|\langle v,e_i\rangle|^2$$

נעביר אגף ונקבל את הנדרש.

■

נבין כיצד טענה זו עוזרת לנו בהוכחת החלק החסר במשפט קודם, לגבי בעיית הקירוב. קודם נוכיח שלכל תת־מרחב U ניתן למצוא בסיס אורתונורמלי $\{e_i\}$. כעת, ניקח בסיס כזה, ומחלק 2 של הטענה נובע שהווקטור $w=v-\sum\langle v,e_i\rangle\cdot e_i$ ניצב לכל איברי U - לכן אם נגדיר את u להיות $u=\sum\langle v,e_i\rangle\cdot e_i$, אזי מצאנו את הווקטור שחיפשנו.