אלגברה לינארית 2א

© ארזים

26 במאי 2016

הגדרנו טרנספורמציה לינארית להיות אוניטרית/אורתוגונלית אם היא מקיימת $TT^* = T^*T = I$. ראינו שקילות לתנאים:

$$\begin{aligned} \langle Tu, Tv \rangle &= \langle u, v \rangle \\ ||Tv|| &= ||v|| \end{aligned}$$

וכן ראינו שקילות לכך שהיא מעבירה בסיס אורתונורמלי אחד כלשהו לבסיס אורתונורמלי אחר.

המושג המקביל עבור מטריצות - מטריצה $A \in M_n(\mathbb{F})$, $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ תיקרא אוניטרית (מעל $\mathbb{C}$) או אורתוגונלית (מעל $\mathbb{R}$) אם $AA^* = A^*A = I$.

טענה 0.1 תהי $T : V \to V$ טרנספורמציה לינארית, $B \subseteq V$ בסיס אורתונורמלי של V. אזי T אוניטרית/אורתוגונלית אם ורק אם גם $A = [T]_B$ גם כזו.

הוכחה: כפי שהוכחנו, כיוון שהבסיס B הוא אורתונורמלי, מתקיים $A^* = [T^*]_B$, ואז $AA^* = [TT^*]_B$ (טענה מסמסטר א'), ואז ברור שבאגף ימין יש ייצוג של טרנספורמציית הזהות. לכן מתקיים

$$AA^* = I \iff TT^* = I$$

וזה שקול לכך שמתקיים

$$A^*A = I \iff T^*T = I$$

וזאת משום שהופכי משמאל הוא הופכי מימין למטריצות ריבועיות ולטרנספורמציות ממרחב לעצמו. ■

משפט 0.2 התנאים הבאים שקולים:

1. A אוניטרית/אורתוגונלית.
2. שורות A מהוות בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^n$ ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית.
3. עמודות A מהוות בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^n$ ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית.

הוכחה: ראשית נחשב את AA^*:

$$AA^* = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\overline{a}+b\overline{b} & a\overline{c}+b\overline{d} \\ c\overline{a}+d\overline{b} & c\overline{c}+d\overline{d} \end{pmatrix}$$

לכן אם נסמן $e_1=(a,b)\,,e_2=(c,d)$, אזי

$$AA^* = \begin{pmatrix} \langle e_1,e_1\rangle & \langle e_1,e_2\rangle \\ \langle e_2,e_1\rangle & \langle e_2,e_2\rangle \end{pmatrix}$$

באופן כללי, אם שורותיה של A הן $e_1,e_2,\dots,e_n$, אז נקבל שמתקיים

$$(AA^*)_{i,j} = \langle e_i,e_j\rangle$$

ומכאן רואים בבירור כי $1 \iff 2$ - שכן

$$AA^*=I \iff (AA^*)_{i,j}=\delta_{i,j} \iff \langle e_i,e_j\rangle=\delta_{i,j}$$

הוכחת $1 \iff 3$ זהה, רק שמחשבים במקום את A^*A: כעת, השורות של A^* הן העמודות של A לאחר הצמדה מרוכבת, ולכן, אם חוזרים על אותה הוכחה, מקבלים $A^*A=I$ שקול לכך ששורות A^* הן בסיס אורתונורמלי, מה ששקול לכך ששורות A^t הן בסיס אורתונורמלי (שכן ההצמדה המרוכבת לא משנה את תוצאות המכפלה הפנימית, שהן 1 או 0), מה ששקול לכך שעמודות A הן בסיס אורתונורמלי. ■

דרך חשובה אחרת להסתכל על מטריצות אוניטריות/אורתוגונליות היא לפי הטענה הבאה.

טענה 0.3 יהיו $\{e_i\}$, $\{\varepsilon_i\}$ שני בסיסים אורתונורמליים של מרחב מכפלה פנימית V, ותהי A מטריצת המעבר מאחד לשני. אזי A אוניטרית/אורתוגונלית.

הוכחה: על מטריצת המעבר אפשר לחשוב כמטריצה המייצגת את הטרנספורמציה הלינארית T היחידה הקיימת

$$Te_i=\varepsilon_i$$

ביחס לבסיס $\{e_i\}$. כעת, לפי המשפט שמאפיין טרנספורמציות לינאריות אוניטריות מהשיעור הקודם, נקבל שהטרנספורמציה T מעבירה בסיס אורתונורמלי אחד לשני, ולכן היא אוניטרית, ולכן גם המטריצה שמייצגת אותה ביחס לבסיס האורתוגונלי $\{e_i\}$, A, היא אוניטרית. ■

באופו אופן מוכיחים את ההיפך - אם A אוניטרית, וכן $\{e_i\}$ בסיס אורתונורמלי של V, אזי הבסיס שמתקבל מתוך $\{e_i\}$על ידי מטריצת מעבר A הוא בסיס אורתונורמלי חדש של V.

טענה 0.4 אם A אוניטרית/אורתוגונלית אזי $|\det A|=1$.

הוכחה:

$$\begin{aligned} AA^* &= I \\ 1=\det A\det A^* &= \det A\det\overline{A^t}=\det A\overline{\det A^t}=\det A\overline{\det A}=\left|\det A\right|^2 \end{aligned}$$

$\blacksquare$

הגדרה 0.5 יהי V מרחב מכפלה פנימית, ותהי $T:V\to V$ טרנספורמציה לינארית. T נקראת נורמלית אם $TT^*=T^*T$.

דוגמאות $T^*=T,T^*=-T,T^*=T^{-1}$.

הגדרה 0.6 מטריצה $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ תקרא נורמלית אם $AA^*=A^*A$.