אלגברה לינארית 2א

ⓒ ארזים

2 ביוני 2016

הבעיה המרכזית בפרק זה: בהינתן טרנספורמציה לינארית במרחב מכפלה פנימית (או מטריצה, במכפלה פנימית סטנדרטית), מתי ניתן ללכסן ביחס לבסיס שהוא גם אורתונורמלי?

כאשר ניתן לעשות זאת, נאמר שהטרנספורמציה לכסינה אורתוגנלית/אוניטרית.

בהקשר של מטריצה A: A תהיה לכסינה אורתוגונלית/אוניטרית אם $T_A(v) = Av$ היא כזו, כלומר קיים בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^n$ של וקטורים עצמיים של A. כלומר, קיימת P הפיכה ואורתוגונלית/אוניטרית המקיימת $P^{-1}AP$ היא מטריצה אלכסונית.

כדי להבין תנאי שהוא בוודאי הכרחי ללכסון כזה, נניח כי T לכסינה אוניטרית, ויהי B בסיס אורתונורמלי מלכסן. נסמן $A = [T]_B$. כעת, ידוע כי $A^* = [T^*]_B = \overline{A}$ (כי B אורתונורמלי, וכן A אלכסונית). כעת ברור כי A, A^* מתחלפות בכפל (שכן כל שתי מטריצות אלכסוניות מתחלפות בכפל), כלומר $A^*A = AA^*$. כעת, $A^*A = [T^*T]_B, AA^* = [TT^*]_B$. לכן, $TT^* = T^*T$.

מסקנה 0.1 אם T לכסינה אורתוגונלית/אוניטרית, אזי בהכרח T נורמלית ($TT^* = T^*T$).

דיון דומה ניתן לעשות גם למטריצות: אם קיית P אוניטרית/אורתוגונלית כך שהמטריצה $D = P^{-1}AP$ אלכסונית, אזי $D^* = \left(P^{-1}AP\right)^* = P^*A^*\left(P^{-1}\right)^* = P^{-1}A^*P$, וכעת, משום שהמטריצות D, D^* אלכסונית הן מתחלפות, ולכן נקבל כי

$$
\begin{aligned}
DD^* &= P^{-1}APP^{-1}A^*P = P^{-1}AA^*P \\
D^*D &= P^{-1}A^*PP^{-1}AP = P^{-1}A^*AP \\
P^{-1}AA^*P &= P^{-1}A^*AP \\
AA^* &= A^*A
\end{aligned}
$$

לכן אם A לכסינה אורתוגונלית/אוניטרית אזי היא בהכרח נורמלית ($AA^* = A^*A$).

הדוגמאות החשובות ביותר: $T = T^*$, $T^{-1} = T^*$.

דוגמא מטריצה שאינה מהצורה הזו:

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
AA^t &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, A^tA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & -\sqrt{2} \\ -1 & 3 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \\
AA^t &= A^tA = \begin{pmatrix} 12 & -4 & 0 \\ -4 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

ישנן הרבה טרנספורמציות נורמליות שאינן אורתוגונליות/אונירטיות או צמודות לעצמן, אבל אנחנו נראה שמתוך שתי המשפחות האלה ניתן לבנות את כולן:

טענה 0.2 נניח כי $R = R^*$, $U^{-1} = U^*$, וכן $RU = UR$. אזי $T = RU$ היא נורמלית.

הוכחה:

$$
\begin{aligned}
TT^* &= (RU)(RU)^* = (RU)(U^*R^*) = RUU^{-1}R = R^2 \\
T^*T &= (RU)^*(RU) = (U^*R^*)(RU) = U^{-1}RRU = RU^{-1}UR = R^2
\end{aligned}
$$

■

בהמשך נוכיח שכל טרנספורמציה נורמלית ניתן להציג בצורה הזו, ונראה כי גם טרנספורמציה הפיכה כללית ניתן להציג כך, בלי התנאי על ההתחלפות של R, U. הטענה הזו נכונה גם ללא הפיכות, אבל לא נוכיח אותה.

משפט 0.3 (המשפט הספקטרלי) מעל $\mathbb{C}$, אם T נורמלית אזי קיים למרחב V בסיס אונרתונורמלי של ווקטורים עצמיים של T.

הערה 0.4 מעל $\mathbb{R}$, אותו דבר נכון, בתנאי שכל שורשי הפולינום האופייני הם ממשיים - מסתבר שזה מתרחש רק עבור המקרה $T = T^*$:

$$
[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{\lambda_1} \end{pmatrix} = [T^*]_B
$$

מכאן נובע בהתאם המשפט על לכסון אורתוגונלי/אוניטרי של מטריצות נורמליות.
ננסח את המשפט בצורה כללית:

משפט 0.5 (המשפט הספקטרלי) יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. תהי T טרנספומרציה לינארית נורמלית ונניח שהפולינום האופייני שלה מתפצל מעל $\mathbb{F}$. אזי T ניתנת ללכסון אורתוגונלית/אוניטרית.

לפני הוכחת המשפט נוכיח מספר טענות.

טענה 0.6 נניח כי S נורמלית וכי $v \in \ker S$. אזי $v \in \ker S^*$.

הוכחה:

$$||S^*v||^2 = \langle S^*v, S^*v\rangle = \langle v, SS^*v\rangle = \langle v, S^*Sv\rangle = \langle Sv, Sv\rangle = ||Sv||^2 = 0$$

■

מסקנה מיידית היא הטענה הבאה:

טענה 0.7 אם T נורמלית, $Tv = \lambda v$. אזי $T^*v = \overline{\lambda}v$.

הוכחה: נסמן $S = T - \lambda I$. ההנחה אומרת שמתקיים $Sv = 0$. כמו כן, $S^* = (T-\lambda I)^* = T^* - \overline{\lambda}I$. נשים לב שגם S נורמלית:

$$\begin{aligned} SS^* &= (T-\lambda I)\left(T^* - \overline{\lambda}I\right) = TT^* - \lambda T^* - \overline{\lambda}T + |\lambda|^2 I \\ S^*S &= \left(T^* - \overline{\lambda}I\right)(T-\lambda I) = T^*T - \lambda T^* - \overline{\lambda}T + |\lambda|^2 I \end{aligned}$$

והביטויים שווים, שכן $T^*T = TT^*$. כעת, מהטענה הקודמת, $S^*v = 0$, כלומר $\left(T^* - \overline{\lambda}I\right)v = 0$, ולכן $T^*v = \overline{\lambda}v$. ■

טענה 0.8 תהי T נורמלית, ויהיו u, v וקטורים עצמיים עם ערכים עצמיים שונים, כלומר

$$Tv = \alpha v, Tu = \beta u$$

כאשר $\beta \neq \alpha$. אזי $v \perp u$.

הוכחה: נחשב:

$$\begin{aligned} \alpha\langle v,u\rangle &= \langle Tv,u\rangle = \langle v, T^*u\rangle = \left\langle v, \overline{\beta}u\right\rangle = \beta\langle v,u\rangle \\ \alpha\langle v,u\rangle &= \beta\langle v,u\rangle, \alpha\neq\beta \\ \langle v,u\rangle &= 0 \end{aligned}$$

■

טענה 0.9 תהי T נורמלית ויהי v וקטור עצמי של T, כלומר $Tv = \alpha v$. יהי $U = \{v\}^\perp$. אזי U הוא T-אינווריאנטי.

הוכחה: יהי $u \in U$. יש להוכיח שגם $Tu \in U$, כלומר $\langle v, Tu\rangle = 0$.

$$\langle v, Tu\rangle = \langle T^*v, u\rangle = \langle\overline{\alpha}v, u\rangle = \overline{\alpha}\langle v,u\rangle = 0$$

■

כעת אנחנו מוכנים להוכחת המשפט הספקטרלי. **הוכחה:** באינדוקציה על $\dim V$. אם $\dim V = 1$, אין מה להוכיח.

כעת נניח כי המשפט ידוע כאשר $\dim V \leq n$, ונוכיח עבור $\dim V = n+1$. בגלל ההנחה על $f_T(x)$ קיים ערך עצמי λשל T בשדה $\mathbb{F}$. יהי $v \in V$ ווקטור עצמי מנורמל

המקיים $Tv=\lambda v$. יהי $U=\{v\}^{\perp}$. אזי $\dim U=\dim V-1=n$. U הוא T־אינווריאנטי, וכן T^*־אינווריאנטי. נביט בצמצום של T למרחב U: היא נשארת נורמלית שם, כי מתקיים $TT^*(u)=T^*T(u)$ לכל $u\in V$ ובפרט לכל $u\in U$. ניקח בסיס כלשהו B של U, וכעת $B\cup\{v\}$ הוא בסיס של V, והמטריצה המייצגת את T ביחס לבסיס B היא

$$\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & A\end{pmatrix}$$

כאשר $A=[T|_U]_B$. לכן, מתקיים $f_T(x)=(x-\lambda)\cdot f_{T|_U}(x)$. כעת, כיוון שהפולינום $f_T(x)$ מתפצל מעל $\mathbb{F}$, אזי גם $f_{T|_U}(x)$ (זה נובע מיחידות הפירוק).

לפיכך, הצמצום של T על U מקיים את כל הנחות המשפט ־ טרנספורמציה נורמלית שהפולינום האופייני שלה מתפצל. לכן נוכל להפעיל את הנחת האינדוקציה. היא נותנת לנו בסיס אורתונורמלי של ווקטורים עצמיים, שנסמנו B.

כעת, $B\cup\{v\}$ הוא בסיס אורתונורמלי של V שהוא אורתונורמלי ומלכסן את T. ■

איך מתבצע לכסון אורתוגונלי/אוניטרי של טרנססורמציה או מטריצה בפועל?

1. מחשבים את $f_T(x)$ או $f_A(x)$ ומוצאים את הערכים העצמיים.
2. לכל ערך עצמי מוצאים את בסיס למרחב העצמי V_λ.
3. בצעו לכל בסיס כזה את תהליך גרם־שמידט.
4. איחוד הבסיסים שייתקבלו יהיה בסיס אורתונורמלי ומלכסן.