אלגברה לינארית 2א

© ארזים

9 ביוני 2016

1 טרנספורמציות נורמליות בממשיים

ראינו את המשפט הבא:

משפט 1.1 תהי T טרנספורמציה לינארית נורמלית על מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$. אזי קיים בסיס אורתונורמלי $B \subseteq V$ כך שמתקיים

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_m & & & \\ & & & \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ -b_k & a_k \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

ראינו בחטף גם טענה נוספת:

טענה 1.2 הצורה שלמעלה היא יחידה עד כדי הסימן של $\{b_i\}$ (ניתן לקבוע שהם חיוביים ולקבל ממש יחידות).

הוכחה: כאשר T מוגדרת כך, מתקיים

$$f_T(x) = \prod_{i=1}^{m} \lambda_i \prod_{i=1}^{k} \left(x^2 - 2a_i x + a_i^2 + b_i^2\right)$$

כעת נניח כי יש צורה נוספת כזו עבור T, עם ערכים עצמיים $\{\mu_i\}$ במקום $\{\lambda_i\}$, ועם בלוקים $\begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \beta_i & \alpha_i \end{pmatrix}$. אזי מאותה סיבה מתקיים

$$f_T(x) = \prod_{i=1}^{r} \mu_i \prod_{i=1}^{s} \left(x^2 - 2\alpha_i x + \alpha_i^2 + \beta_i^2\right)$$

נשים לב שכל הגורמים המופיעים בפירוקים הללו הם אי פריקים, שכן הם לינאריים, או ריבועיים בלי שורש (כלומר אין סיכוי שהם מתפרקים לגורמים לינאריים). כעת, מיחידות הפירוק למכפלת אי פריקים בתחום הראשי $\mathbb{R}\left[x\right]$,

נובע שלאחר שינוי סדר, שני הפירוקים זהים. כלומר חייב להתקיים

$$\begin{aligned}
r &= m \\
\lambda_i &= \mu_i \;\; \forall i \\
s &= k \\
-2\alpha_j &= -2a_j \;\; \forall j \\
\alpha_j &= a_j \;\; \forall j \\
\alpha_j^2+\beta_j^2 &= a_j^2+b_j^2 \;\; \forall j \\
\beta_j^2 &= b_j^2 \;\; \forall j \\
\beta_j &= \pm b_j \;\; \forall j
\end{aligned}$$

וקיבלנו את הנדרש. ■

מקרה פרטי חשוב הוא כאשר T אורתוגונלית: $\left|\lambda_i\right|=1$ ולכן $\lambda_i=\pm 1$. כמו כן, הבלוקים $\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix}$ מייצגים צמצום של הורנספורמציה לתתי מרחבים דו מימדיים ואינווריאנטיים ביחס לבסיס אורתונורמלי, ולכן הם מטריצות אורתוגונליות בעצמם. כדי שהשורות והעמודות יהיו מנורמלות מתקיים $a^2+b^2=1$, כלומר קיים θ כך שמתקיים $a=\cos\theta$, $b=\pm\sin\theta$.

בסך הכל, עבור T אורתוגונלית קיים ייצוג ביחס לבסיס אורתונורמלי כלשהו מהצורה הבאה:

$$\begin{pmatrix}
1 \\
& \ddots \\
&& 1 \\
&&& -1 \\
&&&& \ddots \\
&&&&& -1 \\
&&&&&& \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \\
&&&&&&& \ddots \\
&&&&&&&& \begin{pmatrix} \cos\theta_k & \sin\theta_k \\ -\sin\theta_k & \cos\theta_k \end{pmatrix}
\end{pmatrix}$$

עיקר העבודה בדרך למשפט היה להראות שאם T נורמלית, $W\subseteq V$ הוא מרחב שנשמר תחת T, אזי W נשמר גם תחת T^*. עבור אורתוגונליות מקבלים זאת אוטומטית (T היא איזומורפיזם).

חלק נוסף מההוכחה היה הטענה הכללית הבאה:

טענה 1.3 תהי T טרנספורמציה לינארית על מרחב וקטורי V מעל $\mathbb{R}$ אזי קיים תת מרחב $W\subseteq V$ לכל היותר דו־מימדי שהוא T־אינווריאנטי.

הוכחה: יהי $m_T\left(x\right)$ הפולינום המינימלי של T. נביט בגורם אי פריק של m בחוג $\mathbb{R}\left[x\right]$, ולכן מעלתו לכל היותר 2. נרשום $m_T\left(x\right)=p\left(x\right)\cdot g\left(x\right)$, כאשר $p\left(x\right)=x^2-ax-b$ אי פריק.
כעת,

$$0=m_T\left(T\right)=p\left(T\right)g\left(T\right)$$

ממינימליות m נקבל שלא ייתכן כי $g\left(T\right)\equiv 0$, ולכן $p\left(T\right)$ לא יכולה להיות הפיכה. לכן קיים לה ווקטור $v\neq 0$ שמקיים $v\in\ker p\left(T\right)$. כלומר

$$\begin{aligned}\left(T^2-2aT-bI\right)v &= 0\\ T^2v &= aTv+bv\end{aligned}$$

עתה נגדיר $W=\mathrm{span}\left\{v,Tv\right\}$. $\dim W\leq 2$, שכן הוא נפרש על ידי 2 ווקטורים, וכדי להראות אינווריאנטיות מספיק לראות שכל אחד מהווקטורים הפורשים מקיים שתמונתו תחת T עדיין במרחב.

$$\begin{aligned}T\left(v\right) &= 0\cdot v+1\cdot Tv\in W\\ T\left(Tv\right) &= T^2v=aTv+bv\in W\end{aligned}$$

■

2 פירוק פולארי

הוכחנו כי עבור T הפיכה קיימות R צמודה לעצמה ומוגדרת חיובית, U אוניטרית כך שמתקיים $T=RU$. פירוק זהה קיים גם עבור מטריצות $A=RU$. נוכל לקבל את הייצוג לפי

$$AA^*=\left(RU\right)\left(RU\right)^*=R^2$$

כעת, AA^* צמודה לעצמה, לכן הערכים העצמיים שלה חיוביים והיא לכסינה אוניטרית, כלומר

$$AA^*=P^{-1}DP$$

כאשר P אוניטרית, D אלכסונית. נגדיר

$$R=P^{-1}\sqrt{D}P$$

כאשר $\sqrt{D}$ היא מטריצה אלכסונית שאיברי האלכסון שלה הם שורשי איברי האלכסון של D.
כעת U תיקבע ביחידות.

3 המשפט הספקטרלי

ראינו הוכחה אחת דרך הטענה $Tv = \lambda v \Rightarrow T^*v = \overline{\lambda}v$. ראינו הוכחה גם דרך כך שמטריצה משולשית ונורמלית היא אלכסונית. נראה כעת הוכחה נוספת ־ ראינו הוכחה אלגנטית למקרה הצמוד לעצמו, ונראה איך להכליל אותה למקרה הכללי. **הוכחה:** תהי T נורמלית. נגדיר

$$\begin{aligned} S &= T + T^* \\ R &= i\left(T - T^*\right) \end{aligned}$$

שתי הטרנספורמציות צמודות לעצמן, כפי שראינו בעבר. בנוסף, היות שהטרנספורמציה T נורמלית, $SR = RS$. מטענה משיעורי הבית, ניתן למצוא בסיס אורתונורמלי שמלכסן את שתיהן בו זמנית. לסיום נראה שגם T מתלכסנת ביחס לאותו בסיס:

$$T = \frac{S - iR}{2}$$

וכעת, R, S אלכסוניות ביחס לבסיס, ולכן גם T. ■

4 תבניות בי־לינאריות

ניזכר שכל מטריצה סימטרית חופפת למטריצה יחידה מהצורה

$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix}$$

עכשיו, אנחנו יודעים שכל מטריצה כזו ניתנת ללכסון אורתוגונלי, כלומר קיימת P אורתוגונלית כך שמתקיים

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 && \\ & \ddots & \\ && \lambda_n \end{pmatrix}$$

וכעת, נשים לב שמתקיים $P^* = P^t = P^{-1}$. לכן A גם חופפת למטריצה האלכסונית. המטריצה האלכסונית כמובן חופפת למטריצה שלה יש על האלכסון 1 ככמות λ_i חיוביים, 0 ככמות $\lambda_i = 0$, וכן 1־ ככמות λ_i שליליים. בפרט, נובע כי A חיובית לחלוטין כתבנית בי־לינארית אם ורק אם כל הערכים העצמיים של A הם ממשיים.