אלגברה לינארית 2א

© ארזים

10 במרץ 2016

בשיעור הקודם הוכחנו משפט על שני תנאים ששקולים ללכסינות טרנספורמציה. בעיה טיפוסית שמתעוררת כאשר התנאי הראשון לא מתקיים נמצאת בטרנספורמציית הסיבוב, שראינו שלפולינום שלה $f_T(x) = x^2 - 2\cos\theta x + 1$ אין שורשים ממשיים עבור זוויות שאינן $\pi, 0$. לעומת זאת, יש לה שורשים מרוכבים. בהמשך נוכיח שזו תופעה כללית ־ כל פולינום מעל שדה F מתפצל למכפלת גורמים לינאריים אם עוברים לשדה $F \subseteq K$ "גדול מספיק" (סגור אלגברית).

דוגמה טיפוסית לבעיה שמתעוררת כאשר התנאי השני לא מתקיים היא טרנספורמציית הגזירה, שם חישבנו שהפולינום הוא $f_T(x) = x^{n+1}$, שבבירור מתפצל למכפלת גורמים לינאריים, אבל הטרנספורמציה עדין אינה לכסינה, שכן עבור $\lambda = 0$, מתקיים $r_\lambda = 1$, לעומת $d_\lambda = n + 1$.

ננסה להבין מה בכל זאת אפשר לקבל כאשר התנאי הראשון מתקיים. אנחנו מבינים שלא ניתן לצפות ללכסון באופן כללי, אבל עדיין נרצה למצוא בסיס שביחס אליו הטרנספורמציה מיוצגת בצורה הכי "נוחה" שאפשר. נשאף להוכיח את המשפט הבא:

משפט 0.1 אם $f_T(x)$ מתפצל למכפלת גורמים לינאריים, אזי קיים בסיס B של V שביחס אליו, $[T]_B$ היא משולשית (נניח עליונה).

נצטרך כמה הכנות להוכחה.

הגדרה 0.2 תהי $T : V \to V$, ויהי $W \subseteq V$ תת מרחב. אומרים שהמרחב W הוא T־אינווריאנטי אם לכל $w \in W$ מתקיים $T(w) \in W$.

טענה 0.3 תהיינה $T, S : V \to V$ טרנספורמציות לינאריות שמתחלפות בהרכבה, כלומר $T \circ S = S \circ T$. אזי תתי־המרחבים $\mathrm{Im}S, \ker S$ נשמרים תחת T (כלומר הם מרחבים T־אינווריאנטים).

הוכחה: נסמן $W = \mathrm{Im}S$. יהי $w \in W$, חייב להיות קיים $v \in V$ כך שמתקיים $Sv = w$. אנו רוצים להראות כי גם $Tw \in W$, ואכן:

$$Tw = TSv = STv = S(Tv) \in \mathrm{Im}S$$

באופן דומה, אם $w \in \ker S$, אזי $Sw = 0$. נפעיל את T על השוויון ונקבל

$$\ker S \ni S(Tw) = STw = TSw = T(0) = 0$$

ובכך סיימנו את ההוכחה. ∎

טענה 0.4 תהי $T:V\to V$ טרנספורמציה לינארית, ויהי $W\subseteq V$ תת מרחב T-אינווריאנטי. נסמן $T_W:W\to W$ את הצמצום של T על W ונסמן $f_{T_W}(x)$ את הפולינום האופייני המתאים. אזי מתקיים

$$f_{T_W}\mid f_T(x)$$

הוכחה: ניקח בסיס של W $w_1,\ldots,w_k$ ונשלים אותו לבסיס של V: $w_1,\ldots,w_k,v_{k+1},\ldots v_n$. ביחס לבסיס זה T מיוצגת כך:

$$\begin{pmatrix} A & D\\ \theta & C\end{pmatrix}$$

A,C ריבועיות, כאשר A היא בדיוק המטריצה המייצגת את T_W ביחס לבסיס W. ראינו שמתקיים במקרה כזה:

$$f_T(x)=f_A(x)\cdot f_C(x)=f_{T_W}(x)\cdot f_C(x)$$

■

הערה 0.5 אם $S=T-\lambda I$, אזי S,T מתחלפות, שכן

$$\begin{aligned} T(T-\lambda I) &= T^2-\lambda T\\ (T-\lambda I)T &= T^2-\lambda T\end{aligned}$$

כעת אנו מוכנים להוכיח את המשפט על שילוש טרנספורמצייה לינארית.

משפט 0.6 (הופיע כבר) אם $f_T(x)$ מתפצל למכפלת גורמים לינאריים, אזי קיים בסיס B של V שביחס אליו, $[T]_B$ היא משולשית (נניח עליונה).

הוכחה: נוכיח באינדוקציה על $n=\dim V$. אם $n=1$ הטענה ברורה - אין מה להוכיח. כעת נניח את נכונותה עד n ונוכיח עבור $n+1$. נתון שמתקיים

$$f_T(x)=\prod_{i=1}^{n+1}(x-\lambda_i)$$

נסמן $\lambda=\lambda_1$. λ הוא ערך עצמי ולכן לטרנספורמציה $S=T-\lambda I$ יש גרעין לא טריוויאלי. מכאן $W=\mathrm{Im}S$ ההוא ממימד לכל היותר n (מנוסחת המימדים: $\dim\ker S+\dim\mathrm{Im}S=n+1$). S,T מתחלפות, ולכן מהטענה שראינו, W הינו תת מרחב T-אינווריאנטי. מכאן, מטענה נוספת שראינו, $f_{T_W}(x)\mid f_T(x)$. בשבוע הבא נוכיח כי כל פולינום שמחלק את $f_T(x)$ הוא מכפלה של חלק מן הגורמים המופיעים בפולינום. לכן f_{T_W} גם הוא מתפרק למכפלת גורמים לינאריים. לפיכך, נוכל להפעיל את הנחת האינדוקציה על T_W. מהנחה זו, נובע שקיים בסיס $w_1,\ldots,w_k$ של $W=\mathrm{Im}S$ שביחס אליו T_W משולשית. נשלים

אותו לבסיס של V באופן כלשהו: $B=\{w_1,\dots,w_k,v_{k+1},\dots,v_{n+1}\}$, וכעת נסיים את ההוכחה על ידי כל שנראה כי $[T]_B$ משולשית. ניזכור שהטרנספורמציה S היא $S=T-\lambda I$.

$$[T]_B=\begin{pmatrix} A & * \\ \theta & C \end{pmatrix}$$

כאשר A משולשית עליונה, מהנחת האינדוקציה. נוכיח כעת כי מתקיים גם

$$C=\begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$

לכל v_i, מתקיים

$$Tv_i=(T-\lambda I)\,v_i+\lambda v_i=Sv_i+\lambda v_i$$

כעת מתקיים $Sv_i\in W$, ולכן הוא צירוף לינארי של w_j, ואז נותר רק λ באלכסון של C, אחרי שהמקדמים השונים הופיעו בחלק הימני העליון של המטריצה. ■

1 הצבות של מטריצות וטרנספורמציות בפולינומים

יהי $p(x)\in F[x]$ ותהי $T:V\to V$ טרנספורמציה לינארית. נרשום

$$p(x)=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i$$

כעת נוכל להגדיר

$$p(T)=\sum_{i=0}^{m}a_iT^i$$

כאשר $T^0=I$. נוכל להגדיר כך גם הצבה של מטריצה. עובדה בסיסית על הקשר בין מטריצות וטרנספורמציות בהצבה:

טענה 1.1 אם B בסיס של , $A=[T]_B$, $p(x)\in F[x]$, אזי מתקיים

$$p(A)=[p(T)]_B$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{i=0}^{m}a_ix^i \\ [p(T)]_B &= \left[\sum_{i=0}^{m}a_iT^i\right]_B=\sum_{i=0}^{m}\left[a_iT^i\right]_B=\sum_{i=0}^{m}a_i\,[T]_B^i \end{aligned}$$

$\blacksquare$

בפרט נובע מהטענה הזו שלכל $p(x) \in F[x]$, $A = [T]_B$, אזי

$$p(A) = 0 \iff p(T) = 0$$

באופן כללי, לכל שתי מטריצות דומות A, C,

$$p(A) = 0 \iff p(C) = 0$$

משפט 1.2 (קיילי־המילטון) לכל טרנספורמציה לינארית T, $f_T(T) = 0$. אותו הדבר נכון גם לגבי מטריצות, בגלל הטענה הקודמת.

הוכחה: נפרק את ההוכחה לשלושה שלבים:

1. החלק המשמעותי ביותר ־ נוכיח את המשפט על טרנספורמציה שהפולינום האופייני שלה מתפצל למכפלת גורמים לינאריים (כלומר מטריצה שלישה ־ שיש לה ייצוג כמטריצה משולשית).
נוכיח זאת באינדוקציה על $n = \dim V$. המקרה $n = 1$ ־ טריוויאלי. נניח שהמימד של V הוא $n + 1$, וכי הטענה נכונה לכל מימד שקטן יותר. מהמשפט הקודם, ניתן לשלש את T, כלומר קיים בסיס שביחס אליו המטריצה של T משולשית. במצב זה אנו יודעים כיצד נראה הפולינום האופייני:

$$f_T(x) = \prod_{i=1}^{n+1} (x - \lambda_i)$$

נסמן $W = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_n\}$. בגלל הצורה המשולשית, ברור כי המרחב W הינו מרחב T־אינווריאנטי. ביחס לבסיס $v_1, \ldots v_n$ T_W משולשית, ובפרט היא הריבוע השמאלי העליון של המטריצה של T. לכן הפולינום האופייני שלה הוא

$$f_{T_W} = \prod_{i=1}^{n} (x - \lambda_i)$$

מהנחת האינדוקציה, קיילי־המילטון נכון על T_W, כלומר לכל $w \in W$

$$\left(\prod_{i=1}^{n} (T_W - \lambda_i I)\right)(w) = 0$$

כעת נביט בטרנספורמציה

$$\prod_{i=1}^{n+1} (T - \lambda_i I)$$

נציב בה את איברי הבסיס ונראה שהתוצאות מתאפסות (מלינאריות, הצבת כל ווקטור תתאפס מכך). נציב את v_{n+1}:

$$(T-\lambda_{n+1})(v_{n+1}) = Tv_{n+1} - \lambda_{n+1}v_{n+1} \in W$$

לכן כאשר נציב זאת בהמשך המכפלה, מובטח לנו שנקבל 0. הצבת כל v_i אחר תתאפס, שכן ניתן לשנות את הסדר, וכך להפעיל את החלק שמאפס את ווקטורי W קודם, לקבל 0, ולהפעיל על כך את שאר הגורמים ־ ולקבל 0.
שלב שני ושלישי של ההוכחה יופיעו בהרצאה הבאה.

■