אלגברה לינארית 2א

ⓒ ארזים

29 במרץ 2016

חשוב לזכור שכאשר אנחנו מנסחים משפט למטריצות הוא תקף גם לטרנספורמציות (על ידי ייצוג מטריציוני), ולהיפך.

שאלה טבעית: בהנתן $A \in M_n(F)$ ושדה $K \supseteq F$ המכיל את F, האם m_A נשאר אותו פולינום כאשר חושבים על A במטריצה מעל K?

מה שיכול עקרונית להתרחש הוא שהגדלת השדה מוסיפה לנו סקלרים כך שעכשיו ישנו פולינום ממעלה קטנה יותר שמתאפס על המטריצה.

נוכיח שזה לא המצב. לצורך ההוכחה נסמן בתור $m_A^F(x)$ את הפולינום המינימלי מעל F ובתור $m_A^K(x)$ את הפולינום המינימלי מעל K.

משפט 0.1 תמיד מתקיים $m_A^F = m_A^K$.

הוכחה: די להוכיח

$$\deg m_A^F = \deg m_A^K$$

שכן ראינו כבר כי בדרגת הפולינום המינימלי קיים פולינום מתוקן יחיד וזהו הפולינום המינימלי.

בוודאי ייתכן רק $\deg m_A^K \leq \deg m_A^F$. יש להראות שהדרגה לא יורדת ממש. כדי להראות שזה לא קורה, נשתמש במשפט שהוכחנו, שאומר

$$\dim m_A^F = d = \dim \operatorname{span}_F \left\{I, A, A^2, \ldots, A^{d-1}\right\}$$

זאת אומרת שהקבוצה $\left\{A^i\right\}_{i=0}^{d-1}$ בלתי־תלוייה, וחזקות גבוהות יותר הן צירוף לינארי שלהן.

וכנ"ל מעל K. לכן, כדי להראות שהדרגה לא יורדת מעל K, די להראות שהטריצות $I, A, \ldots, A^{d-1}$ נשארות בלתי־תלוייות גם מעל K, בתוך המרחב $M_n(K)$. זה יוכיח שהדרגה החדשה היא לפחות כמו הקודמת, ויראה שהדרגה לא יכולה לרדת.

העובדה שזה קורה נובעת מהטענה הכללית הבאה:

טענה 0.2 יהיו $v_1, \ldots, v_r \in F^{(m)}$ ווקטורים בלתי תלויים, ויהי $K \supseteq F$ שדה שמכיל את F. אזי $v_1, \ldots v_r$ נשארים בלתי־תלויים גם כווקטורים במרחב $K^{(m)}$.

הוכחה: נשלים אותם לבסיס מעל F: $v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_m$. כעת נשים לב שאותם m ווקטורים הם בסיס למרחב $K^{(m)}$ כאשר עובדים מעל K. מדוע? משום שהווקטורים

הללו הם בסיס אם ורק אם הדטרמיננטה של המטריצה שווקטורים אלה הם שורותיה אינה מתאפסת. הדטרמיננטה של מטריצה לא משתנה במעבר לשדה גדול יותר, ולכן גם כשחושבים על $v_1,\ldots,v_m$ כווקטורים מעל K, הם ממשיכים להיות בסיס, ולכן כל תת קבוצה שלהם בלתי־תלוייה לינארית. ■

ובכך סיימנו את ההוכחה. ■

משפט 0.3 תהי $A\in M_n\left(F\right)$. אם λ הוא ערך עצמי של A אזי הוא שורש של m_A.

משפט זה נובע מהטענה הכללית הבאה:

טענה 0.4 אם $p\left(A\right)=0$ וכן λ ערך עצמי של A אזי $p\left(\lambda\right)=0$.

הוכחה: שמים לב שלכל פולינום $g\left(x\right)\in F\left[x\right]$, אם $Av=\lambda v$ אזי $g\left(A\right)v=g\left(\lambda\right)v$. כעת

$$g\left(A\right)=0\Rightarrow g\left(A\right)v=0\Rightarrow g\left(\lambda\right)v=0\Rightarrow g\left(\lambda\right)=0$$

כאשר השוויון האחרון נכון כי $v\ne0$ בתור ווקטור עצמי. ■

משפט 0.5 אם λ הוא שורש של m_A, אזי λ הוא ערך עצמי של A.

הוכחה: ידוע כי $m_A\left(\lambda\right)=0$. כמו כן, ידוע כי $m_A\mid f_A$ (כי $f_A\left(A\right)=0$ לפי קיילי־המילטון). מכאן נובע כי $f_A\left(\lambda\right)=0$, ולכן λ ערך עצמי של A. ■

לכן, בסך הכל מתקבל ששורשי m_A בשדה F הם בדיוק הערכים העצמיים של A. ניזכר שאנחנו יודעים זאת הפולינום האופייני.

משפט 0.6 לכל $A\in M_n\left(F\right)$ מתקיים

$$m_A\mid f_A\mid m_A^n$$

זה למעשה אומר שלשני הפולינומים יש את אותם שורשים ־ הבעיה היא שמעל F לא תמיד רואים אותם.

הוכחה: כפי שדיברנו, תמיד ישנו שדה $F\subseteq K$ שבו f_A מתפצל למכפלת גורמים לינאריים. כאשר עוברים לעבוד מעל K, המשפטים הקודמים מראים שלפולינומים m_A,f_A יש את אותם שורשים ־ הערכים העצמיים של A מעל K. לכן, הפירוקים של f_A,m_A למכפלת גורמים אי־פריקים בחוג $K\left[x\right]$ נראים כך:

$$\begin{aligned}f_A\left(x\right) &= \prod_{i=1}^{r}\left(x-\lambda_i\right)^{n_i}\\ m_A\left(x\right) &= \prod_{i=1}^{r}\left(x-\lambda i\right)^{m_i}\end{aligned}$$

כאשר לכל $i \neq j$ מתקיים $\lambda_i \neq \lambda_j$, וכן לכל $1 \leq i \leq r$ מתקיים $1 \leq m_i \leq n_i \leq n$.
אלה נובעים בנפרד:
$m_i \leq n_i$ שכן $m_A \mid f_A$, ומיחידות הפירוק בפולינומים.
$n_i \leq n$ שכן $\deg f_A = n$.
$1 \leq m_i$ שכן כל שורש של f_A הוא גם שורש של m_A.
כעת,

$$(m_A(x))^n = \prod_{i=1}^{r} (x - \lambda_i)^{m_i \cdot n}$$

ומכיוון שמתקיים $m_i \cdot n \geq n_i$, נקבל

$$f_A \mid m_A^n$$

עד כה הוכחנו את הטענה במחיר של מעבר לשדה גדול יותר. כדי לסיים ניזכר בשמפט שהוכחנו כמסקנה מחילוק עם שארית:

משפט 0.7 אם $F \subseteq K$ וכן $f(x), g(x) \in F[x]$, אזי אם $f \mid g$ מעל K אזי גם $f \mid g$ מעל F.

כשמשתמשים במשפט הזה בסיטואציה שלנו מקבלים שמתקיים גם $f_A \mid m_A^n$ מעל השדה המקורי F. זה מסיים את ההוכחה. ■

ניזכר שראינו כי במטריצה המלווה של פולינום f מתקיים $f_A = m_A = f$ (ללא קשר לשאלה האם הערכים העצמיים של A הם בשדה F או לא).

משפט 0.8 אם A מטריצה בצורת בלוקים לאורך האלכסון:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k \end{pmatrix}$$

אזי

$$m_A = \operatorname{lcm}(m_{A_1}, \ldots, m_{A_k})$$

זה נובע ישירות מכך שלכל פולינום $g(x) \in F[x]$,

$$g(A) = \begin{pmatrix} g(A_1) & & \\ & \ddots & \\ & & g(A_k) \end{pmatrix}$$

ולכן כדי להתאפס על A יש להתאפס על כל בלוק, כלומר להתחלק בפולינום המינימלי של כל בלוק.

מקרה פרטי קל של הטענה הזו הוא חישוב פולינום מינימלי של מטריצה לכסינה: אם A דומה למטריצה אלכסונית אז יש להן את אותו פולינום מינימלי, ועבור מטריצה אלכסונית:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

וכעת נחשוב עליה כמטריצת בלוקים, כשכל בלוק הוא בגודל 1×1. כעת מהטענה הכללית על פולינום מינימלי של מטריצת בלוקים, נובע:

$$m_A = \operatorname{lcm}\left(x - \alpha_1, \ldots, x - \alpha_n\right) = \prod_{i=1}^{r} \left(x - \lambda_i\right)$$

כאשר $\lambda_i \in \{\alpha_j\}$ נציגים של הערכים השונים מבין α_j, כאשר כל α_j מופיע פעם אחת בדיוק.