אלגברה לינארית 2א

© ארזים

17 במאי 2016

1 העתקה צמודה

בהינתן V מרחב מכפלה פנימית וטרנספורמציה לינארית T עליו, T^* היא ההעתקה המקיימת $\langle Tv, u\rangle = \langle v, T^*u\rangle$.

דוגמאות

1. $\mathbb{R}^n/\mathbb{C}^n$, עם מכפלה פנימית סטנדרטית, עבור מטריצה A,

$$\begin{aligned} T(x) &= Ax \\ T^*(x) &= \overline{A^T}x = A^*x \end{aligned}$$

2. $V = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \int |f|^2 \, \mathrm{d}x < \infty \right\}$, נגדיר

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x$$

עבור $T(f(x)) = f(x+t)$,

$$\begin{aligned} \langle Tf, g\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\, g(x)\, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, g(y-t)\, \mathrm{d}y = \langle f, T^*g\rangle \\ T^*(g(y)) &= g(y-t) \end{aligned}$$

עבור $T(f(x)) = f(\alpha x)$,

$$\begin{aligned} \langle Tf, g\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha x)\, g(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, g\left(\frac{y}{\alpha}\right) \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\left(\frac{1}{\alpha} g\left(\frac{y}{\alpha}\right)\right) \mathrm{d}x = \langle f, T^*g\rangle \\ T^*(g(y)) &= \frac{1}{\alpha} g\left(\frac{y}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

עבור $T\left(f\left(x\right)\right)=f\left(x\right)h\left(x\right)$,

$$\begin{aligned}\left\langle Tf,g\right\rangle &= \int\limits_{-\infty}^{\infty}f\left(x\right)h\left(x\right)g\left(x\right)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f\left(x\right)g\left(x\right)h\left(x\right)\,\mathrm{d}x=\left\langle f,T^{*}g\right\rangle \\ T^{*}\left(g\left(y\right)\right) &= g\left(y\right)h\left(y\right)=T\left(g\left(y\right)\right)\end{aligned}$$

3. לא לחלוטין פורמלי, אבל:

$$\begin{aligned}f:\left[0,1\right] &\to \mathbb{C},K:\left[0,1\right]\times\left[0,1\right]\to\mathbb{C}\\ \left(Tf\right)\left(x\right) &= \int\limits_{0}^{1}K\left(x,y\right)f\left(y\right)\,\mathrm{d}y\\ \left\langle Tf,g\right\rangle &= \int\limits_{0}^{1}\left(\int\limits_{0}^{1}K\left(x,y\right)f\left(y\right)\,\mathrm{d}y\right)\overline{g\left(x\right)}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1}\left(\int\limits_{0}^{1}K\left(x,y\right)\overline{g\left(x\right)}\,\mathrm{d}x\right)f\left(y\right)\,\mathrm{d}y=\\ &= \int\limits_{0}^{1}f\left(y\right)\cdot\overline{\left(\int\limits_{0}^{1}\overline{K\left(x,y\right)}g\left(x\right)\,\mathrm{d}x\right)}\,\mathrm{d}y=\left\langle f,T^{*}g\right\rangle \\ \left(T^{*}g\right)\left(y\right) &= \overline{\int\limits_{0}^{1}\overline{K\left(x,y\right)}g\left(x\right)\,\mathrm{d}x}\end{aligned}$$

4. במרחב $\mathbb{C}_{2}\left[x\right]$, עם המכפלה הפנימית

$$\left\langle f,g\right\rangle =\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}f\left(x\right)g\left(x\right)\,\mathrm{d}x$$

ביחס לבסיס $\left\{1,x,x^{2}\right\}$, נבצע את תהליך גרם שמידט ונקבל

$$\begin{aligned}v_{1} &= 1\\ v_{2} &= \sqrt{3}x\\ v_{3} &= \frac{3}{2}\sqrt{5}\left(X^{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{\sqrt{5}}{2}\left(3x^{2}-1\right)\end{aligned}$$

וכעת

$$v_{4}=x^{3}-\frac{3}{5}x\perp\mathrm{span}\left\{1,x,x^{2}\right\}$$

נתבונן בהעתקה הלינארית

$$T\left(p\left(x\right)\right)=x\cdot p\left(x\right)\mod\left(x^{3}-\frac{3}{5}x\right)$$

כעת,

$$\begin{aligned}\left\langle Tp,q\right\rangle &= \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}x\cdot p\left(x\right)\cdot q\left(x\right)\,\mathrm{d}x=\left\langle p,Tq\right\rangle \\ T^{*} &= T\end{aligned}$$

המטריצה המייצגת של T ביחס לבסיס $\left\{1,x,x^{2}\right\}$:

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & \frac{3}{5}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

5. שוב במרחב $\mathbb{C}_{2}\left[x\right]$, הפעם עם המכפלה

$$\left\langle f,g\right\rangle =\int\limits_{0}^{1}f\left(x\right)\overline{g\left(x\right)}\,\mathrm{d}x$$

ביחס לבסיס הסטנדרטי המטריצה היא

$$H=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

נבצע את גרם־שמידט (לא ננרמל אלא נתחשב באורכים תוך כדי החישובים):

$$\begin{aligned}v_{1} &= 1\\ v_{2} &= x-\frac{\left\langle x,v_{1}\right\rangle }{\left\langle v_{1},v_{1}\right\rangle }v_{1}=x-\frac{1}{2},\left\langle v_{2},v_{2}\right\rangle =\frac{1}{12}\\ v_{3} &= x^{2}-\frac{\left\langle x,v_{1}\right\rangle }{\left\langle v_{1},v_{1}\right\rangle }v_{1}-\frac{\left\langle x,v_{2}\right\rangle }{\left\langle v_{2},v_{2}\right\rangle }v_{2}=x^{2}-\frac{1}{3}-\frac{12}{12}v_{2}=x^{2}-x+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=x^{2}-x+\frac{1}{6}\\ \left\langle v_{3},v_{3}\right\rangle &= \left\langle v_{3},x^{2}\right\rangle =\frac{1}{5}-\frac{1}{4}+\frac{1}{18}=\frac{1}{18}-\frac{1}{20}=\frac{1}{180}\end{aligned}$$

נשים לב שאם נכפול את מקדם הנרמול מתהליך גרם שמידט בסעיף הקודם לכל וקטור בקבוע 4^{d}, כאשר d הוא מעלת איבר הבסיס, נקבל בדיוק את ההופכיים לנורמות שקיבלנו כאן בווקטורים.
כמו כן, אם היינו עושים את תהליך החפיפה שלמדנו על המטריצה, היינו מגיעים לאלכסון שעליו כתובות הנורמות.

נתובנן במכפלה פנימית שמוגדרת על ידי מטריצה B (לא הסטנדרטית, כלומר $B \neq I$), כלומר

$$\langle v,u\rangle = u^* Bv$$

כעת, עבור הטרנספורמציה $Tx = Ax$,

$$\langle Tv,u\rangle = \langle Av,u\rangle = u^*BAv = \left(u^*BAB^{-1}\right)Bv = \left(B^{*^{-1}}A^*B^*u\right)^* Bv = \left\langle v, B^{*^{-1}}A^*B^*u\right\rangle$$

לכן, הצמדוה של הטרנספורמציה היא לא בדיוק הצמודה של המטריצה, אלא דומה לה על ידי הצמודה של מטריצת המכפלה הפנימית.

דוגמה נבצע את תהליך גרם שמידט על הבסיס הסטנדרטי במרחב $\mathbb{R}_2\left[x\right]$ עם המכפלה הפנימית

$$\begin{aligned}
\langle f,g\rangle &= \frac{2}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} p\left(x\right)q\left(x\right)\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \\
\langle 1,1\rangle &= \frac{2}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = 2 \\
\langle x,1\rangle &= \frac{2}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = 0 \\
\langle x,x\rangle &= \frac{2}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = 2
\end{aligned}$$

באופן כללי מתקיים

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} p\left(x\right)q\left(x\right)\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \left[x=\cos\theta\right] = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} p\left(\cos\theta\right)q\left(\cos\theta\right)\,\mathrm{d}\theta$$

כעת אם נגדיר $p_n\left(\cos\theta\right) = \cos\left(n\theta\right)$, נקבל, על ידי חישובים (למשל במרוכבים)

$$\begin{aligned}
p_0\left(x\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\
p_1\left(x\right) &= x \\
p_2\left(x\right) &= 2x^2-1 \\
p_3\left(x\right) &= 4x^3-3x
\end{aligned}$$

באופן כללי, n הפולינומים הראשונים הללו הם בסיס אורתונורמלי למרחב המתאים.

דוגמה V מרחב מכפלה פנימית, U תת מרחב. ניקח $\{e_1,\dots,e_k\}$ בסיס אורתונורמלי של U. נגדיר את העתקת ההטלה האורתוגונלית אל U:

$$\begin{aligned} P_u(v) &= \sum \langle v,e_i\rangle e_i \\ P_u &: V\to V \end{aligned}$$

מתקיים גם

$$\operatorname{im}(P_u)=U,\ker(P_u)=U^{\perp}$$

כעת

$$\langle P_u(v),w\rangle=\sum_{i=1}^{k}\langle v,e_i\rangle\langle e_i,w\rangle=\left\langle v,\sum\overline{\langle e_i,w\rangle}e_i\right\rangle=\left\langle v,\sum\langle w,e_i\rangle e_i\right\rangle=\langle v,P_u(w)\rangle$$

והתבנית צמודה לעצמה. בנוסף, מתקיים

$$\begin{aligned} \langle P_u(v),w\rangle &= \langle v,P_u(w)\rangle=\langle P_u(v),P_w(v)\rangle \\ \langle P_u(v),P_u(w)\rangle &= \langle v,P_u(P_u(w))\rangle=\langle P_u(P_u(v)),w\rangle=\langle v,P_u(w)\rangle=\langle P_u(v),w\rangle \end{aligned}$$

העתקה מעניינת נוספת, העתקת שיקוף ביחס למרח U:

$$P_u-P_{u^{\perp}}$$

ההעתקה הצמודה:

$$(P_u-P_{u^{\perp}})^*=P_u^*-P_{u^{\perp}}^*=P_u-P_{u^{\perp}}$$