אלגברה לינארית 2א

© ארזים

7 ביוני 2016

ראינו בהרצאה את המשפט הבא:

משפט 0.1 אם T נורמלית אזי $T^{*}=p\left(T\right)$ עבור פולינום כלשהו.

דוגמה למשל אם $T^{*}=T^{-1}$,

$$\begin{aligned}
f_{T}\left(T\right) & = 0\\
f_{T}\left(x\right) & = x^{n}+\cdots+\left(-1\right)^{n}\det T=X^{n}+a_{1}x^{n-1}+\cdots+a_{n}\\
\left(-1\right)^{n+1}\det T & = T^{n}+a_{1}T^{n-1}+\cdots+a_{n-1}T=T\left(T^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\right)\\
p\left(x\right) & = \frac{f_{T}\left(0\right)-f_{T}\left(x\right)}{x\cdot f_{T}\left(0\right)}
\end{aligned}$$

טענה 0.2 אם W תת מרחב T-אינווריאנטי עבור T נורמלית, אזי W גם T^{*}-אינווריאנטי, והטרנספורמציה $T\mid_{w}$ נורמלית.

עבור T ניתנת ללכסון, מיהם תתי המרחבים האינווריאנטיים?

$$T\sim\begin{pmatrix}\lambda_{1}\\
 & \ddots\\
 & & \lambda_{1}\\
 & & & \lambda_{2}\\
 & & & & \ddots\\
 & & & & & \lambda_{2}\\
 & & & & & & \ddots\\
 & & & & & & & \lambda_{k}\\
 & & & & & & & & \ddots\\
 & & & & & & & & & \lambda_{k}
\end{pmatrix}$$

V הוא סכום ישר של המרחבים העצמיים של T. לכן כל תתי המרחבים האינווריאנטיים הם כל הסכומים הישרים של תתי מרחבים של המרחבים העצמיים.

$$\begin{aligned}
W & = W_{\lambda_{1}}\oplus\cdots\oplus W_{\lambda_{k}}\\
W_{\lambda_{i}} & = W\cap V_{\lambda_{i}}
\end{aligned}$$

לכל $w\in W$ נוכל לרשום

$$w=\sum w_{\lambda_i},w_{\lambda_i}\in V_{\lambda_i}$$

כשנפעיל את T נקבל

$$T^lw=\sum\lambda_i^lw_{\lambda_i}\in W$$

כעת נסמן

$$A=\left(\lambda_i^l\right)_{i=1,\ldots,k}^{l=0,\ldots,l-1}=\begin{pmatrix}1&\ldots&\ldots&1\\ \lambda_1&\ldots&\ldots&\lambda_k\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ \lambda_1^{k-1}&\ldots&\ldots&\lambda_k^{k-1}\end{pmatrix}$$

והמטריצה הפיכה כי λ_i שונים. כעת

$$\begin{aligned}Ae_i&=&\left(\lambda_i^l\right)_{l=0,\ldots,k-1}=\begin{pmatrix}1\\ \lambda_i\\ \vdots\\ \lambda_i^{k-1}\end{pmatrix}\\ e_i&=&A^{-1}\cdot\left(\lambda_i^l\right)_{l=0,\ldots,k-1}=A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1\\ \lambda_i\\ \vdots\\ \lambda_i^{k-1}\end{pmatrix}\\ \left(e_i\right)_j&=&\sum_l a_{j,l}\lambda_i^l=\delta_{i,j}\\ \sum_l a_{i,l}T^lw&=&\sum_{l,j}a_{i,l}\lambda_j^lw_{\lambda_j}=w_{\lambda_i}\\ w_{\lambda_i}&\in&W\\ w&\in&W_{\lambda_i}\end{aligned}$$

אם W הוא T-אינווריאנטי אזי $W=W_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus W_{\lambda_k}$. על כל W_{λ_k} מתקיים $T\mid_{W_{\lambda_i}}=\lambda_i$ ולכן $T^*\mid_{W_{\lambda_i}}=\overline{\lambda_i}$, ולכן W הוא סכום ישר של תתי מרחבים עצמיים של T^*, ולכן הוא T^* אינווריאנטי.

למעשה רצינו למצוא $c_{i,l}$ כך שמתקיים

$$w_{\lambda_i}=\sum_{l=0}^{k-1}c_{i,l}T^lw=\sum_{l=0}^{k=1}c_{i,l}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j^lw_{\lambda_j}=\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{l=0}^{k-1}c_{i,l}\lambda_j^l\right)w_{\lambda_j}$$

נבחר אותם כך שיתקיים

$$(c_{i,l}) = \left(\lambda_j^l\right)^{-1}$$

טענה 0.3 לכל העתקה T ממשית קיים תת מרחב אינווריאנטי ממימד 1 או 2.

הוכחה: יהא λערך עצמי מרוכב של T. נגדיר $p(x) = (x-\lambda)\left(x-\overline{\lambda}\right) = x^2 - 2\mathrm{Re}(\lambda)x + |\lambda|^2 \in \mathbb{R}[x]$, ונגדיר $K = \ker(p(T))$. אזי K ממימד זוגי, הוא T-אינווריאנטי, וכן, לכל $v \in K$, $\mathrm{span}\{v, Tv\}$ הוא T אינווריאנטי וממימד 2.

K T-אינווריאנטי משום שמתקיים

$$(p(T))v = 0 \Rightarrow T(p(T))v = 0 \Rightarrow (Tp(T))v = 0 \Rightarrow p(T)(Tv) = 0$$

משום שכל פולינום של T מתחלף עם T.

מימד K זוגי שכן $p(T|_K) = 0$, p אי פריק ממעלה 2, ולכן $m_{T|K} = p$, ולכן $f_{T|_k} = p^l$.

כעת $\dim K = \deg p^l = 2l$.

העובדה על המרחב הנפרש מתקבלת משום שמתקיים לכל $v \in K$:

$$\begin{aligned} T^2 v &= 2\mathrm{Re}\lambda T v - |\lambda|^2 v \\ T^2 v &\in \mathrm{span}\{v, Tv\} \end{aligned}$$

v, Tv בלתי תלויים שכן v אינו וקטור עצמי של T. ∎

המשך הטענה: קיים בסיס $v_1, \ldots, v_l$ של K, שלפי בסיס זה

$$T \sim \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -|\lambda|^2 \\ 1 & 2\mathrm{Re}\lambda \end{pmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & -|\lambda|^2 \\ 1 & 2\mathrm{Re}\lambda \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

כמו כן

$$\begin{pmatrix} 0 & -|\lambda|^2 \\ 1 & 2\mathrm{Re}\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

ניזכר שמתקיים במובן מסויים $\mathbb{C} \subseteq M_2(\mathbb{R})$, לפי $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \to a + bi$.

טענה 0.4 אם $V = \mathbb{R}^n$, λ ערך עצמי מרוכב של T ממשית, $p(x) = (x-\lambda)\left(x-\overline{\lambda}\right)$, אזי

$$\begin{aligned} \ker_{\mathbb{C}^n}(p(x)) &= (\mathbb{C}^n)_\lambda \oplus (\mathbb{C}^n)_{\overline{\lambda}} \\ \ker_{\mathbb{R}^n}(p(x)) &= \{v + \overline{v} \mid v \in (\mathbb{C}^n)_\lambda\} \end{aligned}$$

הכללה של ז'ירדון:

$$J_k\left(a+bi\right)=\begin{pmatrix} a & -b & 1 & & & & & \\ b & a & & 1 & & & & \\ & & a & -b & \ddots & & & \\ & & b & a & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & & & \ddots & a & -b \\ & & & & & b & a \end{pmatrix}$$

כמו כן

$$J_k\left(a+bi\right)\overset{\mathbb{C}}{\sim}J_k\left(a-bi\right)$$

ובמקרה הנורמלי:

$$T\overset{\mathbb{R},\perp}{\sim}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \begin{pmatrix} a_m & -b_m \\ b_m & a_m \end{pmatrix} \end{pmatrix}\overset{\mathbb{C}}{\sim}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \lambda_k & & & & & \\ & & & \mu_1 & & & & \\ & & & & \overline{\mu_1} & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \mu_m & \\ & & & & & & & \overline{\mu_m} \end{pmatrix}$$

למשל בפונקציות מחזוריות על $[0,1]$עם

$$\left\langle f,g\right\rangle=\int\limits_0^1 f\left(x\right)\overline{g\left(x\right)}\,\mathrm{d}x$$

$Df=f'$, $D^*=-D$. ניזכר בקבוצה דמויית הבסיס האורתונורמלי שלנו $\left\{e^{2\pi inx}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$, שנסמן את איבריה f_n. כעת, $\left\langle f_n,f_m\right\rangle=\delta_{n,m}$.

$$D\mid_{\mathrm{span}\left\{f_{-N},\ldots,f_N\right\}}\overset{\mathbb{C}}{\sim}\begin{pmatrix} -2\pi iN & & & & & & \\ & -2\pi i\left(N-1\right) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 2\pi i\left(N-1\right) & \\ & & & & & & 2\pi iN \end{pmatrix}$$

עבור $\lambda = 2\pi i$, $p(x) = (x-\lambda)(x+\lambda) = x^2 + 4\pi^2$.

$$\ker(p(D)) = \ker\left(D^2 + 4\pi^2\right) = \left\{f \mid f'' + 4\pi^2 f\right\}$$

כעת נכתוב $f = a\cos(2\pi x) + b\sin(2\pi x)$, וכעת

$$D\mid_{\{\cos 2\pi x, \sin 2\pi x\}} = \begin{pmatrix} 0 & 2\pi \\ -2\pi & 0 \end{pmatrix}$$

וכן

$$D\mid_{\left\{1, \sqrt{2}\cos 2\pi x, \sqrt{2}\sin 2\pi x, \ldots, \sqrt{2}\cos 2\pi n x, \sqrt{2}\sin 2\pi n x\right\}} \overset{\mathbb{R}}{\sim}$$

$$\overset{\mathbb{R}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \begin{pmatrix} 0 & 2\pi \\ -2\pi & 0 \end{pmatrix} & & & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & 4\pi \\ -4\pi & 0 \end{pmatrix} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \begin{pmatrix} 0 & 2\pi n \\ -2\pi n & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

עבור אוניטריות

$$U \overset{\mathbb{C}}{\sim} \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}$$

$$U \overset{\mathbb{R}}{\sim} \begin{pmatrix} R_{\theta_1} & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & R_{\theta_n} & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & -1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

כאשר R_{θ_i} מטריצת הסיבוב בזווית θ_i.