אלגברה לינארית 2א

© ארזים

3 במאי 2016

1 צורות ז'ורדן

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ f_A(x) &= \det(xI - A) = (x-3)(x+2)(x-1) + 6(x-1) + (x-3) - (x+2) + 3 + 2 = \\ &= x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2 \end{aligned}$$

אזי הערכים העצמיים הם $0,1$, עם ריבויים אלגבריים $1,2$ בהתאמה. נחפש ווקטור עצמי עם ערך עצמי 0, ובפרט

$$\ker(A - 0 \cdot I) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ונבחר $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. כעת עבור 1,

$$\begin{aligned} \ker(A - I) &= \ker \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

לכן נבחר $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ונחפש v_2 כך שיתקיים

$$(A - I) v_2 = v_1$$

כלומר יש לפתור את המערכת

$$\begin{pmatrix}2 & -3 & 1 & | & 1\\ 2 & -3 & 1 & | & 1\\ 1 & -1 & 0 & | & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & | & 1\\ 2 & -3 & 1 & | & 1\\ 0 & 0 & 0 & | & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & | & 1\\ 0 & -1 & 1 & | & -1\\ 0 & 0 & 0 & | & 0\end{pmatrix}$$

ולכן

$$v_2 \in \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix}2+z\\1+z\\z\end{pmatrix}$$

ונבחר $v_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$. נבחר את הבסיס $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ ויתקיים

$$[A]_B = \begin{pmatrix}1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 0\end{pmatrix}$$

ולכן מתקיים

$$[Id]_B^E \, A \, [Id]_E^B$$

כאשר

$$[Id]_E^B = P = \begin{pmatrix}| & | & |\\ v_1 & v_2 & v_3\\ | & | & |\end{pmatrix}, [Id]_B^E = P^{-1}$$

באופן כללי, אם $v_1, \ldots, v_n$ בסיס ז'ורדן של A, J צורת ז'ורדן של A, אזי

$$\begin{aligned} A &= P \cdot J \cdot P^{-1} \\ P &= \begin{pmatrix}| & & |\\ v_1 & \ldots & v_n\\ | & & |\end{pmatrix}\end{aligned}$$

דוגמה נוספת:

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix}4 & -2 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\\
f_A(x) &= x^3-6x^2+12x-8=(x-2)\left(x^2-4x+4\right)=(x-2)^3\\
A-2I &= \begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ 2 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow \ker(A-2I)=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}\\
(A-2I)^2 &= \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\
(A-2I)^3 &= 0
\end{aligned}$$

לכן נבחר כך:

$$\begin{aligned}
v_3 &= \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\in\ker(A-2I)^3\setminus\ker(A-2I)^2\\
v_2 &= (A-2I)\,v_3=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\in\ker(A-2I)^2\setminus\ker(A-2I)\\
v_1 &= (A-2I)\,v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\in\ker(A-2I)
\end{aligned}$$

ולכן נקבל צורת ז'ורדן

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & \\ & 2 & 1\\ & & 2\end{pmatrix}$$

2 מרחבי מכפלה פנימית

הגדרה 2.1 מכפלה פנימית על מרחב ווקטורי V מעל $\mathbb{R}$ היא תבנית בי־לינארית סימטרית חיובית לחלוטין.

מכפלה פנימית על מרחב ווקטורי V מעל $\mathbb{C}$ היא תבנית $\langle u,v\rangle$ המקיימת את כל התכונות של תבנית בי לינארית סימטרית חיובית לחלוטין, פרט לשתי התכונות הבאות:

$$\langle u,v\rangle=\overline{\langle v,u\rangle},\langle u,\lambda v\rangle=\overline{\lambda}\,\langle u,v\rangle$$

דוגמאות

1. $u,v\in\mathbb{R}^n$, נגדיר

$$\langle u,v\rangle=u^Tv=v^Tu=\sum_i u_iv_i$$

כנ"ל עבור $u,v\in\mathbb{C}^n$:

$$\langle u,v\rangle=u^T\overline{v}=\overline{v}^tu=\sum_i u_i\overline{v_i}$$

2. עבור $\mathbb{R}$:

$$\langle u,v\rangle=u^TAv$$

כאשר A סימטרית חיובית לחלוטין.
עבור $\mathbb{C}$: נצטרך

$$u^TA\overline{v}=\langle u,v\rangle=\overline{\langle v,u\rangle}=\overline{v^TA\overline{u}}=\overline{v}^T\overline{A}u=u^T\overline{A}^T\overline{v}$$

ולכן נדרוש

$$\overline{A}^T:=A^*=A$$

נקראת מטריצה הרמיטית.

3. עבור $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$, נוכל להגדיר

$$\langle f,g\rangle=\int\limits_0^1 f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$$

עבור $f,g:[0,1]\to\mathbb{C}$, נוכל להגדיר

$$\langle f,g\rangle=\int\limits_0^1 f(x)\,\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x$$

ספציפית עבור $f,g\in\mathbb{C}_n[x]$ נקבל

$$\begin{aligned}\langle f,g\rangle &= \int\limits_0^1\sum_{i,j=0}^n a_i\overline{b_j}x^{i+j}\,\mathrm{d}x=\sum a_i\overline{b_j}\int\limits_0^1 x^{i+j}\,\mathrm{d}x=\sum a_i\overline{b_j}\cdot\frac{1}{i+j+1}=\\ &= \left((a_i)_{i=0}^n\right)^T\left(\frac{1}{i+j+1}\right)_{i,j=0}^n\left(\overline{b_j}\right)_{j=0}^n\end{aligned}$$

4. נקבע $p_1, \dots, p_n > 0$, כך שמתקיים $p_1 + \dots + p_n = 1$, כעת

$$\langle u, v\rangle = \sum p_i u_i v_i$$

ומכאן ניתן לראות (ברגע שלומדים את הנושאים הללו) ששונות ושונות משותפת הן למעשה מכפלות פנימיות.

הגדרנו גם נורמה של ווקטור:

$$\begin{aligned} ||u||^2 &= \langle u, u\rangle > 0 \\ ||u|| &= \sqrt{\langle u, u\rangle} > 0 \end{aligned}$$

אי שוויון קושי שוורץ:

$$|\langle u, v\rangle| \le ||u|| \cdot ||v||$$

אי שוויון המשולש:

$$||u+v|| \le ||u|| + ||v||$$

נראה שקושי שוורץ גורר את אי שוויון המשולש:

$$\begin{aligned} ||u+v||^2 &= \langle u+v, u+v\rangle = \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle = ||u||^2 + ||v||^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle u, v\rangle \\ (||u|| + ||v||)^2 &= ||u||^2 + ||v||^2 + 2\,||u||\,||v|| \end{aligned}$$

לכן

$$||u+v|| \le ||u|| + ||v|| \iff 2\mathrm{Re}\,\langle u, v\rangle \le 2\,||u||\,||v||$$

ואכן מקושי שוורץ

$$2\mathrm{Re}\,\langle u, v\rangle \le 2\,|\langle u, v\rangle| \le 2\,||u||\,||v||$$

ניתן לראות שקילות גם בכיוון השני.
בזכות כל הגיאומטריה הזו, ניתן להגדיר זווית בין שני ווקטורים:

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{|u| \cdot |v|}$$

הגדרה 2.2 ווקטור u ניצב לווקטור v (מסומן $v \perp u$) אם $\langle u, v\rangle = 0$. הווקטורים נקראים אורתוגונאליים.

בהנתן תת מרחב $U \subseteq V$ מגדירים את המרחב הניצב לו:

$$U^{\perp} = \{v \in V \mid \forall u \in U \ u \perp v\}$$

$U^{\perp}$ הוא מרחב ווקטורי.

טענה 2.3 $V = U \oplus U^{\perp}$. בנוסף, $\left(U^{\perp}\right)^{\perp} = \operatorname{span}\{U\}$.

למשל

$$\left(\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}\right)^{\perp} = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mid x+y+z=0\right\}$$

כמו כן, במרחב $\mathbb{C}_2[x]$

$$x^{\perp} = \left\{f \in \mathbb{C}_2[x] \mid \int_0^1 x\overline{f(x)}\,\mathrm{d}x = 0\right\}$$