תרגול 10

10 ביולי 2017

הצרינו (מעל מילון יחיד):

1. לכל קבוצה x יש קבוצה y כך שעוצמת x גדולה מעוצמת y
2. לכל y,x אם x מוכל בy אז עוצמת x אינה גדולה מעוצמת y
3. כל הקבוצות מוכלות בv
4. v אינה קבוצה

   האם 4 נובע מ1,2,3?

   אם כן, הוכיחו באמצעות משפט הרברנד

   אחרת, תנו דוגמא נגדית.

•

מילון: $\{S^1, c^2, L^2, v\}$
S^1- קבוצה
c^2- מכיל את
L^2- עוצמה גדולה יותר
v- קבוע

1. $\varphi_2 = \forall x \forall y \left(c\left(x,y\right) \to \neg L\left(x,y\right)\right)$
2. $\varphi_3 = \forall x \left(S\left(x\right) \to C\left(v,x\right)\right)$
3. $\varphi_4 = \neg S\left(v\right)$

•

נרצה להראות ש$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \vDash \varphi_4$
הטענה שקולה לאי ספיקות של $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \neg\varphi_4\}$
נשתמש באלגוריתם סקולהם כדי למצוא קבוצה שספיקותה שקולה לספיקות קבוצה זאת וכל הפסוקים בה אוניברסלים
נמיר לפסוקי PNF:

1. $\varphi_1 = \forall x \exists y \left(S\left(x\right) \to \left(S\left(y\right) \wedge L\left(y,x\right)\right)\right)$
2. $\neg\varphi_4 = S\left(v\right)$

•

נסלק קמתי קיים:

1. $\varphi_1 \iff \forall x \left(S\left(x\right) \to \left(S\left(f\left(x\right)\right) \wedge L\left(f\left(x\right),x\right)\right)\right)$

•

לפי משפט הרברנד, קבוצה זו ספיקה אמ"מ קבוצת מקרי הבסיס שלה ספיקה.
לכן די להראות שקבוצת מקרה הבסיס אינה ספיקה, ולכן די להראות שתת קבוצה שלה אינה ספיקה.
נבנה את הקבוצה לפי האינטואיציה מהוכחה בהתחלה.

$$\{S\left(v\right), S\left(v\right) \to S\left(f\left(v\right)\right) \wedge L\left(f\left(v\right),v\right), S\left(f\left(v\right)\right) \to C\left(v,f\left(v\right)\right), c\left(v,f\left(v\right)\right) \to \neg L\left(f\left(v\right),v\right)\}$$

ניתן להראות שהיא אכן אינה ספיקה על ידי הנחה בשלילה.

תרגיל : הוכיחו\הפריכו:

א) אם פסוק ישי נכון בכל מבנה הרברנד אז הוא תקף

ב) אם פסוק נכון בכל מבנה הרברנד אז הוא תקף

ג) אם פסוק ישי ספיק אזי הוא ספיק במבנה הרברנד

פתרון:

א)

יהי φ פסוק ישי

אזי $\neg\varphi$ שקול לפסוק אוניברסלי.

לכן הוא לא ספיק אמ"מ הוא לא ספיק במבנה הרברנד (לפי משפט הרברנד)

$\neg\varphi$ לא ספיק אמ"מ φ תקף.

$\neg\varphi$ לא ספיק במבנה הרברנד אמ"מ φ תקף במבנה הרברנד.

ב) דוגמא נגדית מעל מילון $\left\{R^1, c, f^1\right\}$

$$\varphi = \left[R\left(c\right) \wedge \forall x\left(R\left(x\right) \to R\left(f\left(x\right)\right)\right)\right] \to \forall x R\left(x\right)$$

נניח בשלילה שיש מבנה הרברנד H בו φ לא נכון.

אז

1. $\left[|\forall x R\left(x\right)|\right]_\rho^H = f$
2. $\left[|R\left(c\right)|\right]_\rho^H = t$
3. $\left[|\forall x R\left(x\right) \to R\left(f\left(x\right)\right)|\right]_\rho^H = t$

במבנה הרברנד התחום הוא $\left\{c, f\left(c\right), f^2\left(c\right), ...\right\}$

אזי מ1) יש שם עצם סגור כך ש$t \notin R^H$ נסמן ב-T את שם העצם הסגור המינימלי כנ"ל

נראה באינדוקציה שזו סתירה:

אם t=c אז $c \notin R^H$ בסתירה ל$\left[|R\left(c\right)|\right]_\rho^H = t$

אם $t = f\left(t'\right)$ אז $f\left(t'\right) \notin R^H$ וגם $t' \in R^H$ וזו סתירה ל

$$\left[|R\left(t'\right) \to R\left(f\left(t'\right)\right)|\right]_\rho^H = t$$

נראה שφ לא תקף.

ניקח מבנה N כך ש$D^N = \{0, 1\}, f^N = id, c^N = 1, R^N = \{1\}$

$$\left[|\varphi|\right]_\rho^N = h_\to\left(h_\wedge\left(\left[|R\left(c\right)|\right]_\rho^N, \left[|\forall x R\left(x\right) \to R\left(f\left(x\right)\right)|\right]_\rho^N\right), \left[|\forall x R\left(x\right)|\right]_\rho^N\right) = f$$

ג) מעל מילון $\left\{R^1, c\right\}$ ניקח את הפסוק

$$\varphi = \exists x\left(R\left(x\right) \wedge \neg R\left(c\right)\right)$$

מסתפק במבנה M בו $D^M = \{0, 1\}$

$C^M = 0$

$R^M = \{1\}$

אבל מבנה הרברנד לא יספק את φ, כי התחום חייב להיות $\{c\}$אבל $R\left(c\right) \wedge \neg R\left(c\right)$ לא מסתפק באף מבנה.