תרגול 3 לוגיקה

29 במרץ 2017

בשיעור הקודם לא היה לנו הבדל בין $\vee$ ל$\rightarrow$, היום נדבר על משמעות הקשרים

משמעות:

כעת נגדיר מושגים הנותנים משמעות לנוסחאות.

השמה\סביבה היא פונקציה מקבוצת המשתנים אל הקבוצה הבינארית $\{T,F\}$

ערך של נוסחא D בסביבת ρ יסומן $[|S|]_\rho$ומוגדר להיות.

1) אם D משתנה אזי $[|D|]_\rho=\rho\left(D\right)$

2) אם $D=\neg A$ אזי $[|D|]_\rho=h_\neg\left([|A|]_\rho\right)$

3) אם $D=A\circ B$ אזי $[|D|]_\rho=h_\circ\left([|A|]_\rho,[|B|]_\rho\right)$

הגדרה 0.1 נאמר שסביבה מספקת נוסחא אם ערכה בה הוא T

נאמר שנוסחא היא ספיקה אם קיימת סביבה שמספקת אותה

סתירה אם לא קיימת סביבה כזאת

טאוטולוגיה אם כל סביבה כזאת

נאמר שקבוצת נוסחאות ספיקה אם יש סביבה שמספקת את כל הנוסחאות בה

נאמר ששתי נוסחאות (או קבוצות) שקולות אם בדיוק אותן סביבות מספקות אותן

הערה 0.2 כל הטאוטולוגיות שקולות וכן כל הסתירות

תרגיל:

הוכיחו או הפריכו:

1) אם A ספיקה או B ספיקה אז $A\vee B$ ספיקה

2) אם A ספיקה וגם B ספיקה אז $A\wedge B$ ספיקה

פתרון:

1) הוכחה: נניח שA ספיקה אזי יש סביבה ρשמספקת אותה

$$[|A\vee B|]_\rho=h_v\left([|A|]_\rho,[|B|]_\rho\right)=h_v\left(T,[|B|]_\rho\right)=T$$

לכן $A\vee B$ ספיקה המקרה בו B ספיקה דומה.

2) הפרכה: $A=P_1$ $B=\neg P_1$

אזי ברור שתתיהן ספיקות אך מתקיים $A\wedge B$ אינה ספיקה,כי כל סביבה שמספקת את A לא מספקת את B ולהפך.

תרגיל:

תהיינה נוסחאות B,A להן משתנה משותף יחיד P הוכיחו כי אם $P\rightarrow\left(A\rightarrow B\right)$ טאוטולוגיה אזי:

$P\rightarrow\neg A$ טאוטולוגיה או $P\rightarrow B$ טאוטולוגיה

פתרון:

נוכיח את הקונטרה פוזיטיבי. נניח שגם $P\rightarrow\neg A$ וגם $P\rightarrow B$ אינן טאוטולוגיות.

אזי יש ρ_1עבורה $[|P\rightarrow\neg A|]_{\rho_1}=F$

ו ρ_2עבורה$[|P\rightarrow B|]_{\rho_1}=F$

מתקיים: $[|P\rightarrow\neg A|]_{\rho_1}=h_\rightarrow\left([|P|]_{\rho_1},h_\neg\left([|A|]_{\rho_1}\right)\right)$

לכן $[|P|]_{\rho_1}=T,[|A|]_{\rho_1}=T$

$[|P\rightarrow B|]_{\rho_2}=h_\rightarrow\left([|P|]_{\rho_2},[|B|]_{\rho_2}\right)$

לכן $[|P|]_{\rho_2}=T,[|A|]_{\rho_2}=F$

נגדיר השמה:

$$\rho\left(\mathrm{p}\right)=\begin{cases}\rho_1\left(p\right) & p\in Atoms\left(A\right)\\ \rho_2\left(p\right) & else\end{cases}$$

מאחר ו$\rho\left(p\right)=\rho_1\left(p\right)$ לכל משתנה שמופיע בA אזי $[|A|]_\rho=[|A|]_{\rho_1}$

בדומה עבור B, כי אם p מופיע בB אז או שאינו מופיע בA או ש $P=p$ ואז $\rho_1\left(p\right)=\rho_2\left(p\right)$ו $[|B|]_\rho=[|B|]_{\rho_2}$

כעת נותר לשים לב כי

$$[|P\to A\to B|]_{\rho}=h_{\to}\left([|P|]_{\rho},[|A\to B|]_{\rho}\right)=h_{\to}\left(T,h_{\to}\left([|A|]_{\rho},[|B|]_{\rho}\right)\right)=h_{\to}\left(T,h_{\to}\left(T,F\right)\right)=F$$

הגדרה 0.3 נאמר שנוסחא φ נובעת מקבוצת נוסחאות Γ ונסמן $\Gamma\models\varphi$ אם כל סביבה שמספקת את Γ מספקת גם את φ

תרגיל: הוכיחו כי $\Gamma\models\varphi$ אמ"מ $\Gamma\cup\{\neg\varphi\}$ אינה ספיקה

פתרון: $\Gamma\cup\{\neg\varphi\}$ אמ"מ יש סביבה ρ שמספקת אותה אמ"מ ρ מספקת את Γ וגם לא מספקת את φ אמ"מ $\Gamma not\models\varphi$

תרגיל:

1) הוכיחו כי כל קבוצה ספוית של נוסחאות שקולה לכל קוניונציה שלהם (על הדרך זה מראה ש$\wedge$אסוצייטיבית וקומוטטיבית)

2) הוכיחו כי יש קבוצת נוסחאות שאינה שקולה לאף נוסחה

פתרון: 1) אינדקוציה על גודל הקבוצה. אם $n-1$ טריוויאלי: נניח נכונות ל$n=k$ ותהי $\Gamma=\Delta\sqcup\{e\}$מגודל $k+1$ ולכן Δ שקולה לΔ $\bigwedge$ לכל סדר וסדר פעולות.

תהי ρ השמה, Γ מסתפקת על ידי ρ אמ"מ Δ וφ מסתפקות על ידה אמ"מ Δ $\bigwedge$ וφ מסתפקות על ידה אמ"מ $\Delta\wedge\varphi_1$ ו$\varphi\wedge\Delta$ $\bigwedge$ מסתפקות על ידה.

ρ הייתה שרירותית ולכן השקילות. הבחירה של $\varphi\in\Gamma$ הייתה שרירותית ולכן כיסינו את כל הקוניונקציות האפשריות.

2) נראה כי אין נוסחא שמסתפקת על על ידי השמה יחידה. אכן תהי φ שמסתפקת על ידי ρ. יהי משתנה P שא מופיע בφאז ההשמה ρ' שמזדהה עם ρ

פרט ל $\rho\left(P\right)\neq\rho'\left(P\right)$ גם מספקת את φ.

כעת נשים לב כי קבוצת המשתנים שמסתפקת רק על ידי ההשמה הקבועה T.

הערה 0.4 אם ידוע ש$\Gamma\models\varphi$ האם ניתן להסיק שיש $\Delta\subseteq\Gamma$ סופית כך ש$\Delta\models\varphi$

התרגיל הקודם רומז שלא אבל דווקא כן! זהו נקרא משפט הקומפקטיות ונוכיח אותו בהמשך הקורס