תרגול 5 - חלק ב'

תזכורת - מע' הוכחה HPC

אקסיומות

A1: $\alpha \to (\beta \to \alpha)$

A2: $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$

A3: $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$

כללי היסק: MP

$$\Sigma \models \alpha \;\underset{\text{שלמות}}{\overset{\text{נאותות}}{\rightleftarrows}}\; \Sigma \vdash_{HPC} \alpha$$

Σ עקבית $\underset{\text{נאותות}}{\overset{\text{שלמות}}{\rightleftarrows}}$ Σ ספיקה.

תרגיל: נגדיר מע' הוכחה חדשה N עבור $WFF_{\{\neg,\vee\}}$

אקסיומות:

A: $\alpha \vee (\beta \vee \neg\alpha)$

כללי היסק:

(1) MQ_1: $\dfrac{\alpha \quad \beta}{\alpha \vee \beta}$

(2) MQ_2: $\dfrac{\alpha,\ \neg\alpha \vee \beta}{\beta}$

הוכיחו: N נאותה.

צ"ל Σ, α, אם $\Sigma \vdash_N \alpha$ אז $\Sigma \models \alpha$

הוכחה: תהי Σ. נוכיח $\{\alpha \mid \Sigma \vdash_N \alpha\} \subseteq \{\alpha \mid \Sigma \models \alpha\}$

באינדוקציה על $\{\alpha \mid \Sigma \vdash_N \alpha\}$

בסיס: α אקס': אומר קיים β, γ כך ש- $\alpha = \beta \vee (\gamma \vee (\neg\beta))$ (A) אקס'

רואים: $\Sigma \models \alpha$

α טאוטולוגיה (אפשר לפתור עם טבלת אמת)

ולכן $\Sigma \models \alpha$.

2. אם $\alpha \in \Sigma$ ברור ש- $\Sigma \models \alpha$

צעד: סגירות ל- MQ_1, MQ_2

סגירות ל MQ_1:

יהיו α, β כך ש- $\Sigma \models \alpha$ ו- $\Sigma \models \beta$ (הן ב-T) ← מהנחת האינדוקציה

רוצים להראות $\Sigma \models \alpha \vee \beta$

תהי V השמה כך ש- $V \models \Sigma$

מהנחת האינדוקציה $V \models \alpha$ $V \models \beta$ ולכן $V \models \alpha \vee \beta$

לכן $\Sigma \models \alpha \vee \beta$. (הראינו שייכות ל- T)

MQ_2: יהיו α, β כך ש- $\Sigma \models \alpha$ ו- $\Sigma \models \neg\alpha \vee \beta$

(ראה $\Sigma \models \beta$

תהי V השמה כך ש- $V \models \Sigma$

מהנחת האינדוקציה, $V \models \alpha$ $V \models \neg\alpha \vee \beta$

כלומר: $V \models \neg\alpha$ או $V \models \beta$, כיוון ש- $V \models \alpha$, $V \not\models \neg\alpha$

ולכן בהכרח $V \models \beta$. ∎

מסקנה: אם $\Sigma \vdash_N \alpha$ אז $\Sigma \models \alpha$ כלומר N נאותה.

תרגיל: נגדיר מערכת הוכחה N: עבור $WFF_{\{\neg,\to\}}$

אקסיומות:

$A1: \alpha \to (\beta \to \alpha)$

$A2: (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$

כללי היסק:

① $MP: \dfrac{\alpha, \ \alpha \to \beta}{\beta}$

② MQ

אינטואיטיבית: (כוללים טאוטולוגיה)

א) נגדיר: $MQ: \dfrac{\alpha \to (\beta \to \alpha)}{\alpha}$

הוכיחו/הפריכו: N שלמה (כלומר: לכל Σ, α אם $\Sigma \models \alpha$ אז $\Sigma \vdash_N \alpha$) (*)

פתרון: נוכיח ש- N שלמה

אפשר לבחור: לכל $\alpha \in WFF_{\{\neg,\to\}}$ ולכל Σ, $\Sigma \vdash_N \alpha$ (ואז מתקיים (*))

תהי Σ ויהי α.

① $\alpha \to (\alpha \to \alpha)$ (A1)

2. α MQ(1)

ב) נגדיר $MQ: \dfrac{\alpha \to (\beta \to \alpha)}{(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)}$

הוכיחו/הפריכו: N שלמה.

פתרון: נוכיח שלמה.

ממשפט השלמות של HPC

$\{\alpha \mid \Sigma \models \alpha\} \subseteq \{\alpha \mid \Sigma \vdash_N \alpha\}$

$\{\alpha \mid \Sigma \vdash_{HPC} \alpha\}$

תהי Σ.

ממשפטי השלמות והנאותות מספיק להוכיח ש-

$$\{\alpha \mid \Sigma \vdash_{HPC} \alpha\} \subseteq \{\alpha \mid \Sigma \vdash_{N} \alpha\}$$

באינדוקציה על $\{\alpha \mid \Sigma \vdash_{HPC} \alpha\}$

<u>בסיס:</u> (האקסיומות של HPC):

מקרה I: α אקסיומה, אם α מהצורה A1 או A2,

אז $\Sigma \vdash_N \alpha$ כי α אקסיומה גם ב-N

<u>מקרה II:</u> אם α מהצורה (A3), כלומר, יש γ, β כך ש-

$\alpha = (\neg\beta \to \neg\gamma) \to (\gamma \to \beta)$ נראה $\Sigma \vdash_N \alpha$.

סעיף → הוכחנו בתחילת הפרק

1. $\gamma \to (\beta \to \gamma)$ (A1)
2. $(\neg\beta \to \neg\gamma) \to (\gamma \to \beta)$ MQ

$(''\alpha)$

רוצים להראות ש-T סגורה ל-F

מקרה II: $\alpha \in \Sigma$ ברור ש- $\Sigma \vdash_N \alpha$.

<u>צעד:</u> $\{\alpha \mid \Sigma \vdash_N \alpha\}$ סגורה ל- MP כי MP הוא כלל היסק ב-N.

(על כלל היסק של HPC)

<u>תרגיל:</u> נגדיר מערכת הוכחה N: מעל $WFF_{\{\wedge,\neg\}}$.

<u>אקסיומות:</u>

B1: $\neg(\alpha \wedge (\beta \wedge \neg\alpha))$

<u>כללי היסק:</u>

M1: $\dfrac{\alpha,\ \neg(\alpha \wedge \beta)}{\neg\beta}$

<u>הוכיחו/הפריכו:</u> N שלמה

(כלומר, האם: $\forall \Sigma, \alpha$ $\Sigma \models \alpha$ אז $\Sigma \vdash_N \alpha$)

נפריך. רוצים למצוא Σ, α כך ש- $\Sigma \models \alpha$ אבל $\Sigma \nvdash_N \alpha$

<u>טענת עזר:</u> נגדיר $T = \{\alpha \in WFF_{\{\neg,\to\}} \mid$ קיים β כך ש- $\alpha = \neg\beta\}$

<u>נוכיח:</u> $\{\alpha \mid \vdash_N \alpha\} \subseteq T$ ($\Sigma = \emptyset$ משמעות שמחרון)

<u>באינדוקציה:</u>

<u>בסיס:</u> אקסיומה:

$\alpha = \neg(\beta \wedge (\gamma \wedge \neg\beta))$ (B1) ולכן

$\alpha \in T$ (כי יש לו $\neg$ מהתחלה).

דוג' 3: נניח ש- $\alpha, \neg(\alpha\wedge\beta) \in T$

$$M1: (\alpha, \neg(\alpha\wedge\beta)) = \neg\beta \in T$$

(כי של not ¬)

נשאר למצוא α כך ש- $\models\alpha$ אבל $\alpha\notin T$ (ולכן $\nvdash_N \alpha$)

$$(\neg(p_0\wedge\neg p_0)) \wedge (\neg(p_0\wedge\neg p_0)) = \alpha$$

היינו לוקחים רק את זה
אבל יש מינוס ולכן ב-T
לכן נוסיף את
זה

עונה על הדרישות.
לכן, N אינה שלמה.

<u>הגדרה:</u> תהי M מערכת הסקה עבור $WFF_{\{\neg,\to\}}$
Σ תקרא עקבית ב- M אם יש' $\alpha\in WFF_{\{\neg,\to\}}$
ש- $\Sigma \nvdash_M \alpha$

<u>הוכחה/הסברים:</u>

(א) אם M נאותה אז ∅ עקבית ב- M.

<u>הטענה נכונה, נניח:</u> $\nvdash_M p_0$

אם $\vdash_M p_0$ אז מכיוון ש- M נאותה $\models p_0$ אבל זה לא נכון.

לכן $\nvdash_M p_0$, ו- ∅ עקבית ב- M.

(ב) אם ∅ עקבית ב- M, אז M נאותה.

(אינטואיציה להפרכה: אם זה היה נכון תמיד היינו מראים על ∅ וזה נשמע לא סביר)

<u>נפריך את הטענה:</u> נמצא מע' M שבה ∅ עקבית אך M אינה נאותה

<u>אקס':</u> ∅

<u>כללי הסק:</u> $MQ: \frac{\alpha}{\neg\alpha}$

(לא משנה
שיש
את הנחות)

<u>צריך לראות:</u> $\{\alpha \mid \Sigma\vdash_M \alpha\} = \emptyset$

(וזה גורר ש- ∅ עקבית כי בפרט $\emptyset \nvdash_M p_0$).

הוכחה: ברור (הבסיס ריק).

נשאר למצוא Σ ו- α כך ש- $\Sigma\vdash_N\alpha$ אבל $\Sigma\not\models\alpha$

$\Sigma=\{p_0\}$, $\alpha=\neg p_0$.

ו. $\Sigma \vdash_N \alpha$. הנה ההוכחה:

1. p_0 הנחה

2. $\neg p_0$ $p\otimes(1)$

$\Sigma \not\models \alpha$ כי $V_T \models \Sigma$ ו $V_T \not\models \alpha$