28.12

תרגול שבוע 9

הגדרה: הצבת שם עצם במקום משתנה:

יהי t ש"ע, x משתנה. הצבה של t במקום x בש"ע s, המסומנת $s[t/x]$ מוגדרת באינדוקציה על מבנה s:

בסיס: אם $s=c$ סימן קבוע במילון

$$s[t/x]=c=s$$

אם $s=y$ $y\neq x$ משתנה

$$s[t/x]=y=s$$

אם $s=x$

$$s[t/x]=t$$

צעד: $s=f(s_1,\dots,s_n)$, f סימן פונקציה n-מקומי במילון.

$$s[t/x]=f(s_1[t/x],\dots,s_n[t/x])$$

תהי α נוסחה. ההצבה של t במקום x ב-α, המסומנת $\alpha[t/x]$ מוגדרת באינדוקציה על מבנה α.

בסיס: $\alpha=R(s_1,\dots,s_n)$, R סימן יחס n-מקומי. s_i-ים ש"ע.

$$\alpha[t/x]=R(s_1[t/x],\dots,s_n[t/x])$$

צעד: קשרים. אם $\alpha=\beta\wedge\gamma$

$$\alpha[t/x]=\beta[t/x]\wedge\gamma[t/x]$$

הקשרים האחרים: באופן דומה.

כמתים: $\alpha=\forall y\beta$

$$\alpha[t/x]=\begin{cases}\alpha & \text{if } y=x\\ \forall y\,\beta[t/x] & \text{if } y\neq x\end{cases}$$

דוגמאות: מהו $\alpha[t/x]$?

1. $\alpha=\forall x(R(x)\to S(x,f(y)))$

$t=g(y)$

$\alpha[t/x]=\alpha$

2. $\alpha=R(x)\to\forall x(S(x,f(y)))$

$t=g(y)$

$\alpha[t/x]=R(g(y))\to\forall x(S(x,f(y)))$

ג. $\alpha = \forall y\, (S(y,x) \wedge \forall x\, R(x))$

$t = g(y)$

$$\alpha[t/x] = \forall y\, (S(y, g(y)) \wedge \forall x\, R(x))$$

נהיה
מופע קשור.

במקרה כזה נגיד ש-t אינו מותר להצבה ב-x בנוסחה α.

<u>טענה:</u> יהיו s,t שמות עצם, v השמה

$$\bar{v}\left(t[s/x]\right) = \bar{v}[\bar{v}(s)/x]\,(t)$$

<u>הוכחה:</u> באינדוקציה על מבנה t :

<u>בסיס:</u> $t=c$ או $t=y\neq x$

$$t[s/x] = t$$
$$\bar{v}\,(t[s/x]) = \bar{v}(t)$$

$$\bar{v}[\bar{v}(s)/x](t) = \bar{v}(t)$$

(כי רק הערך של x משתנה)

<u>אם $t=x$:</u>

$$t[s/x] = s$$

$$\bar{v}\,(t[s/x]) = \bar{v}(s)$$

הכוונה קו ככה: /

$$\bar{v}\,[\bar{v}(s)/x](t) = \bar{v}\,[\bar{v}(s)/x](x) = \bar{v}(s)$$

<u>צעד:</u> $t = f(t_1, \ldots, t_n)$

$$t[s/x] = f(t_1[s/x], \ldots\, t_n[s/x])$$

$$\bar{v}(t[s/x]) = \bar{v}\left(f(t_1[s/x], \ldots, t_n[s/x])\right) =$$

$$= f^M(\bar{v}(t_1[s/x]), \ldots, \bar{v}(t_n[s/x])) =$$

$$= f^M(\bar{v}[\bar{v}(s)/x](t_1), \ldots, \bar{v}[\bar{v}(s)/x](t_n))$$

מהנחת האינדוקציה

$\overset{=}{\underset{\text{מהגדרה}}{\downarrow}}$ $\bar{V}[\bar{V}(s)/x]\big(f(t_1,\ldots,t_n)\big) = \bar{V}[\bar{V}(s)/x](t)$

טענה: M מבנה, V השמה

אם t חופשי להצבה במקום x ב-α.

$$M,V[\bar{V}(t)/x] \models \alpha \iff M,V \models \alpha[t/x]$$

הוכחה: באינדוקציה על מבנה α.

עבור הבסיס הטענה הקודמת שימושית מאוד.

צעד האינדוקציה: המקרה המעניין יהיה בכמת.

הגדרות: M מבנה, V השמה, α נוסחה, Γ קבוצת נוסחאות.

(1) M,V הם t-מודל של α אם $M,V\models\alpha$

אם קיים ל-α t-מודל (נאמר ש-α t-ספיקה.

באותו אופן מגדירים t-מודל של Γ, Γ t-ספיקה.

(2) M הוא V-מודל של α אם $M\models\alpha$

(נאמר לכל V, $M,V\models\alpha$)

α V-ספיקה...... אותו דבר עבור Γ.

(3) $\Gamma\models^{t}\alpha$ אם כל t-מודל של Γ הוא t מודל של α.

$\Gamma\models^{V}\alpha$ אם כל V-מודל של Γ הוא V- מודל של α.

תרגיל: הוכיחו/הפריכו:

(א) אם Γ V-ספיקה אז Γ t-ספיקה.

הוכחה: נכון! נניח ש-Γ V-ספיקה, אז יש M כך ש- $M\models\Gamma$

כלומר לכל השמה V $M,V\models\Gamma$. כיוון ש- $D^M\neq\emptyset$ קיימת השמה

V עבור M ולכן קיים t-מודל של Γ.

(ב) אם Γ t ספיקה אז Γ V-ספיקה

לא נכון! נמצא דוגמה נגדית

$$\Gamma=\{R(x)\wedge\exists y\,\neg R(y)\}$$

Γ t-ספיקה: נגדיר מבנה M כך ש- $D^M=\{1,2\}$

$R^M=\{1\}$

V השמה כך ש $V(x)=1$ אז $M,V\models\Gamma$ (כי $V(x)=1$ ולא קיים ... שלא קיים)

Γ אינה $\forall$-ספיקה. יהי M מבנה. נראה ש- $\Gamma \not\models M$

אם $M \not\models \exists y \neg R(y)$ סיימנו.

אחרת, נניח שכן. אז קיים $a \in D^M$ ש- $a \notin R^M$. תהי v השמה

כך ש- $v(x)=a$ ולכן $M,v \not\models R(x)$. $M,v \not\models \Gamma$ $\Leftarrow$

כלומר M לא $\forall$-מודל של Γ.

(#) הערה: אם Γ קבוצה של פסוקים אז הטענה ספיקות של $\forall$ נכונה.

נוסחה α כך ש- $FV(\alpha)=\emptyset$

הגדרה: α נוסחה $FV(\alpha)\subseteq\{x_1,\dots,x_n\}$

$$\alpha^\forall = \forall x_1 \dots \forall x_n \, \alpha$$ ← הסגור האוניברסלי

$$\Gamma^\forall = \{\alpha^\forall \mid \alpha\in\Gamma\}$$

תרגיל: הוכיחו/הפריכו:

(1) אם $\Gamma^\forall$ $\models$-ספיקה אז Γ $\models$-ספיקה.

פתרון: נוכיח.

הוכחה: יהיו M, v $\models$-מודל של $\Gamma^\forall$. $\Gamma^\forall$ קבוצת פסוקים

ולכן $M \models \Gamma^\forall$ (לפי הערה (#)) אז: לכל השמה v ולכל $\alpha\in\Gamma^\forall$,

$M,v\models\alpha$ כלומר לכל v $\varphi\in\Gamma$, $M,v\models\forall x_1\dots\forall x_n\varphi$

לכן: לכל v, לכל $\varphi\in\Gamma$, לכל $a_1,\dots,a_n\in D^M$

$$M,v[a_1/x_1,\dots,a_n/x_n]\models\varphi$$

לכן יש $\models$ מודל עבור Γ

הכיוון השני לא נכון (הדוגמה הנגדית מסעיף ב׳ יעבוד עם ספ).
יתכן עם כמה שינויים + +