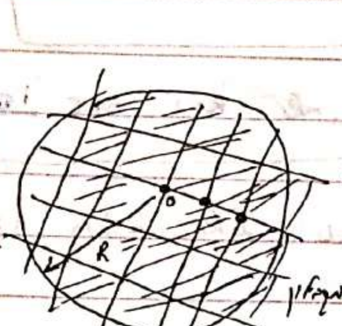
24/3/19

הרצאה 4

סריג - $L\subseteq\mathbb{C}$, $L=\mathbb{Z}\omega_1+\mathbb{Z}\omega_2$ כאשר $\omega_1,\omega_2\in\mathbb{C}$ בת"ל מעל $\mathbb{R}$. $f(z)$ אליפטית - אם f מרומורפית ומחזורית ביחס ל-L.

כדי לבנות דוגמאות לפונקציות אליפטיות, נצטרך תכונות של סריגים - יהי $L\subseteq\mathbb{R}^2$ סריג. נסמן:

$$N_L(R)=\#\{\omega\in L \mid |\omega|\le R\}$$



טענה: כאשר $R\to\infty$, $N_L(R)\sim C_L\cdot R^2$, כאשר $C_L=\frac{\pi}{area(D_L)}$ עבור D_L מקבילון יסודי עבור L.

הוכחה: סביב כל נקודת סריג ω נשים $\omega+D_L$ - הזזה של המקבילון היסודי, ונסמן $P=\bigcup_{|\omega|\le R}(\omega+D_L)$. זהו פוליגון. אזי,

$$area(P)=\sum_{|\omega|\le R}area(\omega+D_L)=N_L(R)\cdot area(D)$$

$$\Rightarrow \frac{area(P)}{area(D_L)}=N_L(R).$$

מצד שני, נשים לב כי $\pi(R-2d)^2\le area(P)\le\pi(R+2d)^2$, שכן $B_0(R-2d)\subseteq P\subseteq B_0(R+2d)$ כאשר $d=diam(D_L)$. לכן:

$$\pi R^2+O(R)=\pi(R-2d)^2\le N(R)\cdot area(D_L)\le\pi(R+2d)^2=\pi R^2+O(R)$$

$\Leftarrow$ סה"כ $N(R)=\frac{\pi R^2}{area(D)}R^2+O(R)$. $\square$

מסקנה: יהי $L\subseteq\mathbb{C}$ סריג, ויהי $k>2$. אזי,

$$\sum_{0\ne\omega\in L}\frac{1}{|\omega|^k}<\infty$$

הוכחה: לכן,

$$\sum\frac{1}{|\omega|^k}=\underbrace{\sum_{|\omega|\le1}\frac{1}{|\omega|^k}}_{O(1)}+\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{2^j\le|\omega|\le2^{j+1}}\frac{1}{|\omega|^k}\le O(1)+\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^j}\right)^k\underbrace{N_L(0,2^{j+1})}_{O((2^{j+1})^2)}\le$$

$$\le O(1)+\sum_{j\ge0}\left(\frac{1}{2^j}\right)^{k-2}<\sum_{j=0}^{\infty}\left(2^{2-k}\right)^j+O(1)<\infty \quad \square$$

הגדרה: $L\subseteq\mathbb{C}$ סריג, $k>2$ שלם, נגדיר -

$$f_k(z)=\sum_{\omega\in L}\frac{1}{(z-\omega)^k}$$

טענה: הסכום $f_k(z)$ מתכנס בהחלט ומקומית במ"ש ב-$\mathbb{C}-L$.

הוכחה: יהי $z\notin L$,

$$f_k(z)=\sum_{|\omega|\le2|z|}\frac{1}{|z-\omega|^k}+\sum_{|\omega|>2|z|}\frac{1}{|z-\omega|^k}$$

אם $|\omega|>2|z|$, אזי, $|\omega-z|\geq||\omega|-|z||\geq\frac{|\omega|}{2}$

לכן:

$$\sum_{|\omega|>2|z|}\frac{1}{|z-\omega|^k}<\sum_{|\omega|>2|z|}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}|\omega|}\right)^k\underset{\text{למה}}{<}\infty \qquad \square$$

מסקנה: $f_k(z)$ היא מרומורפית ב-$\mathbb{C}-L$ עם קטבים מסדר k בנקודות L, וגם

$$f_k(z)\underset{z\to0}{\sim}\frac{1}{z^k}+O(1)$$

טענה: עבור $k>2$, אז $f_k(z)$ אליפטית ביחס ל-L.

הוכחה: נראה שאם $\omega_0\in L$, $f_k(z+\omega_0)=f_k(z)$. ואכן:

$$\square\ f_k(z+\omega_0)=\sum_{\omega\in L}\frac{1}{(z+\underbrace{\omega_0-\omega}_{-(\omega-\omega_0)=\omega'})^k}=\sum_{\omega'\in L}\frac{1}{(z-\omega')^k}=f_k(z)$$

קיבלנו $f_k(z)\neq0$ (כי $f_k(z)\sim\frac{1}{z^k}$ כאשר $z\to0$), אליפטית.

הגדרה: פונקציית $\wp$ של Weierstrass -

$$\wp(z;L):=\frac{1}{z^2}+\sum_{0\neq\omega\in L}\left[\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right]$$

טענה: הסכום של $\wp$ מתכנס בהחלט ובמ"ש.

הוכחה: כרגיל נעריך:

$$\left|\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right|=\left|\frac{\overbrace{\omega^2-(z-\omega)^2}^{2\omega z-z^2}}{\omega^2(z-\omega)^2}\right|\underset{|\omega|\gg1}{\ll_z}\frac{|\omega|}{|\omega|^4}=\frac{1}{|\omega|^3}$$

לכן,

$$\sum_{0\neq\omega\in L}\left|\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right|<\infty \qquad \square$$

מסקנה: $\wp(z;L)$ מרומורפית ב-$\mathbb{C}-L$, וגם,

$$\wp(z)\underset{z\to0}{\sim}\frac{1}{z^2}$$

טענה: $\wp$ אליפטית ביחס ל-L.

הוכחה: נחשב את $\wp'$:

$$\wp'=\frac{-2}{z^3}+\sum_{0\neq\omega\in L}\frac{-2}{(z-\omega)^3}=-2\sum_{\omega\in L}\frac{1}{(z-\omega)^3}=-2f_3(z)$$

- אליפטית. לכן $\wp'$ - אליפטית. נקבע $\omega_0\in L$. אזי,

$$\wp'(z+\omega_0)-\wp'(z)=0$$

לכן, יש קבוע $C(\omega_0)$ כך ש:

$$\wp(z+\omega_0)-\wp(z)=C(\omega_0)$$

נשים לב ש- $\wp(z)$ - זוגית. לכן, אם נציב $z=-\frac{\omega_0}{2}$, נקבל:

$$\wp\left(-\frac{\omega_0}{2}+\omega_0\right)-\wp\left(-\frac{\omega_0}{2}\right)=C(\omega_0)$$

$$\Leftarrow \quad \wp\left(-\frac{\omega_0}{2}\right)-\wp\left(\frac{\omega_0}{2}\right)=C(\omega_0)$$

$$\Rightarrow C(\omega_0)=0$$

□

<u>תכונות כלליות של פונקציות אליפטיות</u>

1) לפונקציה אליפטית לא קבועה חייבים להיות קטבים
2) f כנ"ל מקבלת כל ערך ב- $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$
3) כל ערך מתקבל אותו מספר של פעמים בתחום היסודי
4) מתקיים $\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D} f(z)=0$
5) בתחום, סכום $\sum_{p_i\in D}\mathrm{Res}_{p_i} f=0$ (p_i קטבים של f)
6) נובע כי $\sum_{f(z_i)=0} z_i-\sum_{f(z_j)=\infty} z_j\in L$.

<u>תזכורת</u> ש- $\wp$ - פונקציה אליפטית זוגית, מסדר $ord(\wp)=2$. נאמר ש- $f(z)$ [illegible]
תהא f אליפטית ולא קבועה.

<u>משפט</u>: (א) כל פונקציה אליפטית זוגית, היא פונקציה רציונלית ב- $\wp$.
(ב) כל פונקציה אליפטית ביחס ל- L היא -

$$f=R(\wp)+\wp'\cdot S(\wp)\,,\quad R,S\in\mathbb{C}(x)$$

(מאין, $\wp'$ אי זוגי)

<u>פיתוח טור של $\wp$</u>

נגדיר - $G_n(L)=\sum_{0\neq\omega\in L}\frac{1}{\omega^n}$, $n>2$. מאין, $G_{2n+1}(L)=0$, שכן -

$$G_{2n+1}=\sum_{\omega\in L}\frac{1}{\omega^{2n+1}}\underset{\omega'=-\omega}{=}\sum_{\omega'\in L}\frac{1}{(-\omega')^{2n+1}}=-\sum_{\omega'\in L}\frac{1}{(\omega')^{2n+1}}=-G_{2n+1}$$

משפט: עבור $0<|z|<1$,

$$\wp(z;L)=\frac{1}{z^2}+\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)G_{2n+2}(L)z^{2n}$$

הוכחה: נשים לב -

$$\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}=\frac{1}{\omega^2}\left[\frac{1}{(1-\frac{z}{\omega})^2}-1\right]$$

נזכר -

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n \quad , \quad |x|<1$$

וגם,

$$\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}=\frac{1}{\omega^2}\cdot\sum_{m\geq 1}(m+1)\left(\frac{z}{\omega}\right)^m$$

לכן,

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{\omega\neq 0}\left(\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right)=\frac{1}{z^2}+\sum_{\omega\neq 0}\frac{1}{\omega^2}\cdot\sum_{m\geq 1}(m+1)\left(\frac{z}{\omega}\right)^m=$$

$$=\frac{1}{z^2}+\sum_{m\geq 1}(m+1)\underbrace{\left[\sum_{\omega\neq 0}\frac{1}{\omega^{m+2}}\right]}_{=G_{m+2}(L)}\cdot z^m$$

$\square$

המשוואה הדיפרנציאלית עבור $\wp$

נגדיר: $g_2(L)=60G_4(L)$, $g_3(L)=140G_6(L)$. אז:

משפט: $(\wp')^2=4\wp^3-g_2\wp-g_3$

הוכחה: $\wp=\frac{1}{z^2}+3G_4z^2+5G_6z^4+O(z^6)$

$$\wp'=\frac{-2}{z^3}+6G_4z+20G_6z^3+O(z^5)$$

$$\wp'^2=\frac{4}{z^6}+2\cdot\frac{-2}{z^3}6G_4z+2\cdot\frac{-2}{z^3}20G_6z^3+O(z^2)=$$

$$=\frac{4}{z^6}-24G_4\cdot\frac{1}{z^2}-80G_6+O(z^2)$$

נחסר $4\wp^3$ כדי להיפטר מהאיבר $\frac{1}{z^6}$ - נקבל

$$(\wp')^2-4\wp^3=-60G_4\cdot\frac{1}{z^2}-140G_3+O(z^2)=-g_2\frac{1}{z^2}-g_3+O(z^2)$$

$$(\wp)^3=\frac{1}{z^6}\left(1+3G_4z^4+5G_6z^6+\dots\right)^3=$$

$$=\frac{1}{z^6}\left(1+3\cdot 1^2\cdot 3G_4z^4+3\cdot 1^2\cdot 5G_6z^6+O(z^8)\right)=$$

$$=\frac{1}{z^6}+9G_4\cdot\frac{1}{z^2}+15G_6+O(z^2)$$

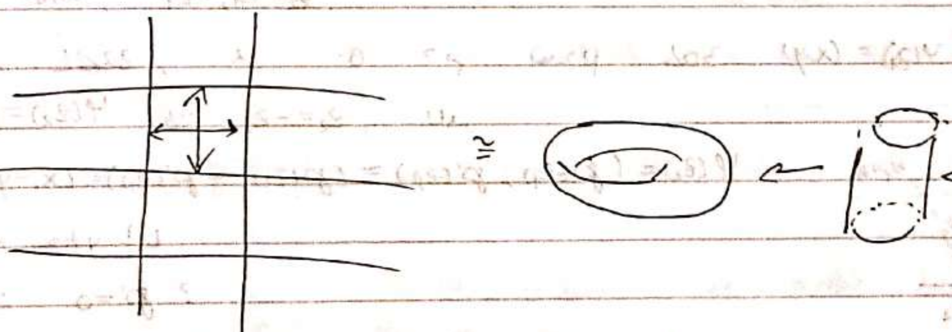
עכשיו נוסיף $g_2\wp$.

$$(\wp')^2-4\wp^3+g_2\wp=-g_2\cdot\frac{1}{z^2}-g_3+g_2\left(\frac{1}{z^2}+3G_4z^2+\dots\right)$$
$$=-g_3+O(z^2)$$
$$\Leftarrow\quad (\wp')^2-4\wp^3+g_2\wp-g_3=O(z^2)$$

פונקציה אליפטית, אנליטית, שמתאפסת בנקודה, לכן קבועה. וב-$z=0$ מתאפסת, לכן זהותית אפס. □

ההעתקה:
$$\mathbb{C}/L\longrightarrow E_L,\quad z+L\overset{\varphi}{\mapsto}(\wp(z),\wp'(z))$$
$$E_L=\{(x,y)\in\mathbb{C}^2 \mid y^2=4x^3-g_2(L)x-g_3(L)\}\cup\{\infty\}$$

משכנע את E_L נקרא "עקום אליפטי".



בצורה פרויקטיבית:
$$\mathbb{P}^2=\{(u:v:w)\mid u,v,w\in\mathbb{C},\ \text{לא כולם אפס},\ (u,v,w)\sim(\lambda u,\lambda v,\lambda w)\}$$
נכתוב את המשוואה של E_L בצורה הומוגנית:
$$E_L=\{(X:Y:Z)\mid ZY^2=4X^3-g_2XZ^2-g_3Z^3\}\subseteq\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$$

$\boxed{\text{נקודה ב-}\infty \rightsquigarrow Z=0}$

זהו משטח, ואפשר לחשב את הגנוס שלו - גנוס 1.

מהן משוואות ההעתקה לעיל?

טענה: φ היא על, הפיכה, 1-1, נקודות הסינגולריות $z\in\frac{1}{2}L$ (יש 4 כאלו)

הוכחה: נבחר $(x,y)\in E_L$, $y^2=4x^3-g_2x-g_3$. מכיוון ש-$\wp$ היא על, יש z כך ש-$\wp(z)=x$. y נקבע ע"י $y^2=4x^3-g_2x-g_3$ עד כדי סימן.

גם ℘' מקיים:

$$(\wp')^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3 = 4x^3 - g_2x - g_3$$

לכן -

$$\wp' = \begin{cases} y \\ -y \end{cases}$$

אם הוא y - סיימנו. אחרת נשים $-y$, ועבור $\wp'(z)=-y$, כי $\wp'$ אי-זוגית, ומשום ש-$\wp$ זוגית, ה-x לא ישתנה. לכן -

$$\varphi(-z)=(x,y)$$

בנ"כ, φ היא חד ערכית.

$$(\wp(z_1),\wp'(z_1)) = \varphi(z_1) \overset{?}{=} \varphi(z_2) = (\wp(z_2),\wp'(z_2))$$

$\Leftarrow$

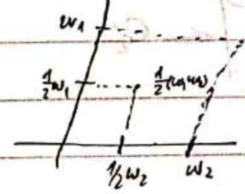
$$\wp(z_1)=\wp(z_2)$$
$$\wp'(z_1)=\wp'(z_2)$$

$\wp(z_1)=\wp(-z_1)$, וכמו כן, $\wp(z_1)=\wp(-z_1)$, ולכן, $\wp$ היא מסדר 2 ל-1. (שכן $\gamma(\wp)=2$)

לכן אם ניקח ~~...~~ $z_1 \neq z_2 \mod L$ - אז הפתרונות היחידים -

כלומר, $z_2=z_1,-z_1$.

אם $2z_1\notin L$, אז יש רק פתרון אחד ל-$\varphi(z_1)=(x,y)$, כי אם $\varphi(z_2)=(x,y)$ אז $z_2=-z_1$, אבל,



$$\varphi(z_2)=(\wp(-z_1),\wp'(-z_1))=(\wp(z_1),-\wp'(z_1))=(x,-y)\neq(x,y)$$

(אם $y\neq 0$!)

מה אם $\wp'=0$?

נזכור ש-$\wp'(z)=0 \iff 2z\in L$ אך $z\notin L$. לכן,

$$\wp'\left(\tfrac{\omega}{2}\right) = \underbrace{\wp'\left(-\tfrac{\omega}{2}+\omega\right)}_{\text{מחזוריות}} = \underbrace{\wp'(-\omega/2)}_{\wp'\ \text{אי-זוגית}} = -\wp'(\omega/2)$$

נזכר כי ש-$\wp'=0$ ב-$w/2$, אבל אם רק $w/2\in L$, ואז יש קוטב.

<u>משפט:</u> $\varphi:\mathbb{C}/L\to E\cup\{\infty\}$ זו, אשר 1 ל-1, פרט לנקודות 2 ל-1 בנקודות המחזוריות $\frac{1}{2}L/L-\{0\}$ (3 נקודות כאלו) ולכן ב-$z=0$, שם מקבלים את אינסוף.

<u>חוק החבורה של E</u>

יהיו שתי נקודות $P_1,P_2\in E$, כאשר:

$$E=\{y^2=4x^3-g_2x-g_3\}$$

נבחר:

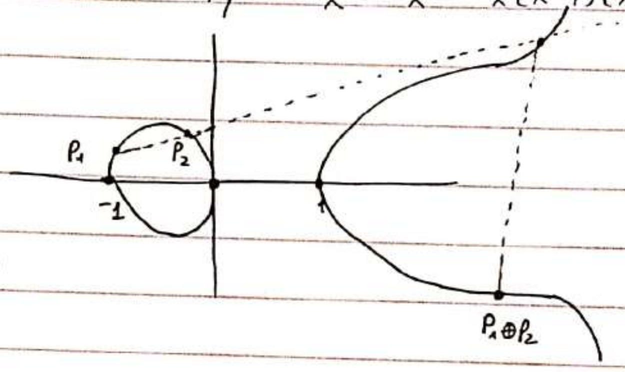
$$P_1=\varphi(z_1),\ P_2=\varphi(z_2),\quad z_i\in \mathbb{C}/L$$

נגדיר את הסכום,

$$P_1\oplus P_2=\varphi(z_1+z_2)\in E$$

<u>חוק החבורה בצורה גיאומטרית</u>

ניקח למשל, $4y^2=x^3-x=x(x-1)(x+1)$.



$P_1+t(P_2-P_1)$ ← מציבים לתוך המשוואה, מקבלים משוואה ממעלה 3 ב-t, ויודעים שני פתרונות אז מוצאים גם את השלישי.

<u>משפט:</u> ① אם $P=(x,y)$, אז $-P=(x,-y)$.

② $\varphi(z_1), \varphi(z_2), -\varphi(z_1+z_2)=\varphi(-z_1-z_2)$ הן על ישר אחד.

③ הגזר הנ"ל: $\varphi(0)=0_E$ הוא הנקודה באינסוף.

<u>מסקנה:</u> את חוק החבורה של E ניתן לכתוב ע"י נוסחאות אלגבריות בקואורדינטות.

הנוסחה היא כדלקמן - אם
$$P_1=\varphi(z_1)=(x_1,y_1)$$
$$P_2=\varphi(z_2)=(x_2,y_2)$$
"גנריים"

אז, $P_1\oplus P_2=(x_3,y_3)$ כאשר:

$$-x_3=x_1+x_2+\frac{1}{4}\left(\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right)^2$$

$$-y_3=y_1+(x_3-x_1)\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$$