אנליזה נומרית 1

ⓒ ארזים

25 ביוני 2017

1 אינטגרציה נומרית

1.1 נקודות ומשקלות ־ חישוב ותכונות

יש לנו כלל האינטגרציה

$$I=\sum_{k=1}^{n}\omega_k f\left(x_k\right)$$

למה 1.1 המשקלות $\omega_1,\ldots,\omega_k$ המתאימים לכלל אינטגרציה המתאים לפונקציית משקל $\rho\left(x\right)$ הם חיוביים.

הוכחה: נסתכל על הפולינום

$$Q_i\left(x\right)=\prod_{j\neq i}\left(x-x_j\right)^2$$

כאשר $x_1,\ldots,x_k$ השורשים של הפולינום האורתוגונלי $p_n\left(x\right)$ עבור $\rho\left(x\right)$. $Q_i\left(x\right)$ ממעלה $2n-2$, ולכן הכלל מדוייק עליו. כמו כן, אם נציב:

$$\int_a^b Q_i\left(x\right)\rho\left(x\right)\,\mathrm{d}x=\sum_{j=1}^{n}\omega_k f\left(x_k\right)=\omega_i Q\left(x_i\right)$$

אגף שמאל חיובי כי Q_i חיובי, וכך גם הקבוע $Q\left(x_i\right)$. לכן גם ω_i. ■

נשים לב שנוכל לבצע אינטגרציה לפונקציה 1 ולקבל

$$\int_a^b \rho\left(x\right)\,\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n}\omega_i$$

תזכורת הוכחנו כי

$$p_0\left(x\right)=1$$
$$p_{n+1}\left(x\right)=\left(x-\beta_n\right)p_n\left(x\right)-\gamma_n^2 p_{n-1}\left(x\right)$$

משפט 1.2 הפולינום האופייני של המטריצה

$$J_n = \begin{pmatrix} \beta_0 & \gamma_1 & & & & \\ \gamma_1 & \beta_1 & \gamma_2 & & & \\ & \gamma_2 & \beta_2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \gamma_{n-2} & \\ & & & \gamma_{n-2} & \beta_{n-2} & \gamma_{n-1} \\ & & & & \gamma_{n-1} & \beta_{n-1} \end{pmatrix}$$

הוא $p_n(x)$.

הוכחה: באינדוקציה. $p_0(x) = 1$ כמו שצריך. כעת, מנוסחת הרקורסיה, $p_1(x) = x - \beta_1$, וזה גם הפולינום האופייני של המטריצה מסדר 1.

נניח נכונות לכל $i < n$. כעת נפתח את J_n לפי העמודה האחרונה:

$$\det(xI_n - J_n) = (x - \beta_{n-1}) \cdot \det J_{n-1} + \gamma_{n-1} \det M$$

כאשר M הוא המינור המתקבל ממחיקת העמודה האחרונה והשורה הלפני אחרונה. נפתח אותה לפי השורה האחרונה ונקבל:

$$\begin{aligned} \det(xI_n - J_n) &= (x - \beta_{n-1}) \det J_{n-1} - \gamma_{n-1}^2 \det J_{n-2} = \\ &= (x - \beta_{n-1}) p_{n-1}(x) - \gamma_{n-1}^2 p_{n-2}(x) = p_n(x) \end{aligned}$$

■

מסקנה 1.3 השורשים של p_n הם הערכים העצמיים של J_n.

אם $x_1, \ldots, x_n$ הם השורשים של $p_n(x)$, אז המשקלות $\omega_1, \ldots, \omega_n$ נתונים כפתרון של מערכת המשוואות:

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i p_j(x_i) = \begin{cases} \int_a^b p_j(x) \rho(x) \, \mathrm{d}x & j = 0 \\ 0 & o/w \end{cases}$$

תרגיל יהיו $x_0, \ldots, x_n$ השורשים של פולינום צ'בישב $T_{n+1}(x)$. נתונה המטריצה

$$A_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} T_0(x_j) & i = 0 \\ T_i(x_j) & o/w \end{cases}$$

האם היא הפיכה? אם כן, חשבו את ההופכית.

פתרון נחשב את AA^T:

$$\left(AA^T\right)_{i,j} = c_{i,j} \sum_k T_i(x_k) T_j(x_k)$$

$$c_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{2} & i = j = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & i = 0, j \neq 0 \vee i \neq 0, j = 0 \\ 1 & i \neq 0, j \neq 0 \end{cases}$$

המשקלות עבור פולינומי צ'בישב הם $\frac{\pi}{n+1}$, ולכן נכתוב

$$\begin{aligned}\left(AA^T\right)_{i,j} &= c_{i,j}\frac{n+1}{\pi}\sum_k \frac{\pi}{n+1}T_i\left(x_k\right)T_j\left(x_k\right) = \\ &= c_{i,j}\frac{n+1}{\pi}\int_{-1}^{1} T_i\left(x\right)T_j\left(x\right)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \\ &= c_{i,j}\frac{n+1}{\pi}b_i\delta_{i,j}\end{aligned}$$

כאשר $b_i = \frac{\pi}{2}$ לכל $i \neq 0$, $b_0 = \pi$. אזי

$$\left(AA^T\right)_{i,i} = \frac{n+1}{2}$$

ולכן ההופכית היא

$$A^{-1} = \frac{2}{n+1}A^T$$