אנליזה נומרית 1

© ארזים

29 ביוני 2017

1 שאלות ברמת בחינה

תרגיל תהי $\{x_\nu\}$ סדרת נקודות בתוך $\mathbb{R}$ המתכנס אל x. נניח שלכל $\nu \in \mathbb{N}$ מתקיים $x_\nu \neq x$, וכן

$$\begin{aligned} x_{\nu+1} - x &= (\xi_\nu + q)(x_\nu - x) \\ |q| &< 1 \\ \lim_{\nu\to\infty} \xi_\nu &= 0 \end{aligned}$$

נגדיר

$$y_\nu = x_\nu - \frac{(x_{\nu+1} - x_\nu)^2}{x_{\nu+2} - 2x_{\nu+1} + x_\nu}$$

הראו כי y_ν מוגדר היטב וכל כי

$$\lim \frac{y_\nu - x}{x_\nu - x} = 0$$

כיצד ניתן להשתמש בטענה זו עבור שיטות איטרטיביות.

פתרון הטענה מאפשרת להאיץ התכנסות של שיטה איטרטיבית על ידי בניית y_ν. נראה מוגדרות היטב:

$$\begin{aligned} x_{\nu+2} - 2x_{\nu+1} + x_\nu &= (x_{\nu+2} - x) - 2(x_{\nu+1} - x) + (x_\nu - x) = \\ &= (\xi_{\nu+1} + q)(x_{\nu+1} - x) - 2(\xi_\nu + q)(x_\nu - x) + (x_\nu - x) = \\ &= \underbrace{(x_\nu - x)}_{\neq 0}\underbrace{((\xi_{\nu+1} + q)(\xi_\nu + q) - 2(\xi_\nu + q) + 1)}_{\xrightarrow{\nu\to\infty} q^2 - 2q + 1 = (q-1)^2 \neq 0} \end{aligned}$$

לכן יש ν_0 כל שלכל $\nu \geq \nu_0$ המכנה לא מתאפס. נבדוק את הגבול המבוקש:

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{y_\nu - x}{x_\nu - x} = 0$$

נכתוב

$$y_\nu = x_\nu - \frac{(x_{\nu+1} - x_\nu)^2}{x_{\nu+2} - 2x_{\nu+1} + x_\nu}$$

אם כן

$$y_\nu - x = (x_\nu - x) - \frac{(x_{\nu+1} - x_\nu)^2}{x_{\nu+2} - 2x_{\nu+1} + x_\nu}$$

נותר להראות

$$\frac{y_\nu - x}{x_\nu - x} = 1 - \frac{1}{x_\nu - x} \frac{(x_{\nu+1} - x_\nu)^2}{x_{\nu+2} - 2x_{\nu+1} + x_\nu} \to 0$$

נראה שהגורם הימני שואף לאחד.

$$\frac{1}{x_\nu - x} \frac{(x_{\nu+1} - x_\nu)^2}{x_{\nu+2} - 2x_{\nu+1} + x_\nu} = \frac{1}{(x_\nu - x)^2} \frac{((x_{\nu+1} - x) - (x_\nu - x))^2}{((\xi_{\nu+1} + q)(\xi_\nu + q) - 2(\xi_\nu + q) + 1)} =$$

$$= \frac{1}{\cancel{(x_\nu - x)^2}} \frac{\cancel{(x_\nu - x)^2} (q + \xi_\nu - 1)^2}{((\xi_{\nu+1} + q)(\xi_\nu + q) - 2(\xi_\nu + q) + 1)} \to \frac{(q-1)^2}{(q-1)^2} = 1$$

וסיימנו.

תרגיל תהי

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$$

עבור $a_m \neq 0$, ויהיו $x_0, \ldots, x_n$ נקודות שונות.

1. הראו שאם $n = m$ אזי $f[x_0, \ldots, x_n] = a_n$.
2. הוכיחו שאם $n < m$ אזי $f[x_0, \ldots, x_n, x]$ הוא פולינום ממעלה $m - n - 1$ בכל קטע פתוח בין נקודות דגימה עוקבות.

פתרון

1. נשים לב שבמצב זה, יש לנו $n + 1$ נקודות דגימה לפולינום f ממעלה n. לכן, מהמשפט על אינטרפולציה, f היא פולינום האינטרפולציה של עצמה בנקודות הללו. $f[x_0, \ldots, x_n]$ הוא המקדם המוביל של פולינום האינטרפולציה, a_n הוא המקדם המוביל של f, ולכן הוכחנו שוויון.
2. נכתוב

$$f(x) - p(x) = f[x_0, \ldots, x_n, x](x - x_0) \cdots (x - x_n)$$

מההגדרה נקבל $f[x_0, \ldots, x_n, x]$ פולינום, ומעלתו חייבת להיות $m - n - 1$ (אחרי העברת אגפים וספירת מעלות).

תרגיל תהי f גזירה ברציפות 4 פעמים. נניח כי

$$f(1.0) = 2.7183$$
$$f(0.8) = 2.2255$$
$$\int_{0.8}^{1} f(x)\, dx = 0.4927$$

מצאו נוסחת גזירה נומרית עבור $f'(1)$ שצורתה

$$f'(a) = \frac{3f(a) - 4f(a-h) + f(a-2h)}{2h} + o\left(h^2\right)$$

פתרון נרצה לקחת $a=1$, $h=0.1$ - אבל אין לנו את $f(0.9)$. נחלץ ביטוי מקורב מהנתון על האינטגרל. נשתמש באינטגרציה נומרית - כלל סימפסון.

$$\int\limits_{a-2h}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f(a-h) + f(a-2h)\right) - f^{(4)}(\eta)\,\frac{h^5}{90}$$

ואכן נקבל

$$4f(a-h) = \frac{3}{h}\int\limits_{a-2h}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x - f(a) - f(a-2h) + \frac{3}{h}\frac{f^{(4)}(\eta)}{90}h^5$$

נציב בגזירה הנומרית:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \frac{3f(a) - \left(\frac{3}{h}\int_{a-2h}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x - f(a) - f(a-2h) + O\left(h^4\right)\right) + f(a-2h)}{2h} + O\left(h^2\right) = \\ &= \frac{4f(a) - \frac{3}{h}\int_{a-2h}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + 2f(a-2h)}{2h} + \underbrace{O\left(h^3\right) + O\left(h^2\right)}_{O(h^2)} \end{aligned}$$

קיבלנו נוסחה מהצורה שרצינו, כשאנחנו יכולים לחשב את החלק השמאלי - הכל שם נתון לי.