אנליזה נומרית 1

ארזים ©

8 ביוני 2017

1 שגיאה באינטרפולציה

תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ויהיו $a\le x_0<\cdots<x_n\le b$ נקודות בקטע. קיים ויחיד פולינום ממעלה לכל היותר n עבורו לכל i מתקיים

$$f\left(x_i\right)=p\left(x_i\right)$$

תרגיל בקטע $[0,1]$ נסתכל על $f\left(x\right)=e^{2x}$. ניקח נקודות דגימה המסודרות בצורה אחידה על פני הקטע, כלומר

$$x_j=\frac{j}{n}$$

יהי p_n פולינום האינטרפולציה המבוסס על נקודות אלו. הראו כי $p_n\to f$ במידה שווה.

פתרון נזכיר שהשגיאה באינטרפולציה היא

$$\left|e\left(x\right)\right|=\left|f\left(x\right)-p\left(x\right)\right|$$

שאפשר לכתוב אותה על ידי

$$e\left(x\right)=f\left[x_0,\ldots,x_n,x\right]\left(x-x_0\right)\cdots\left(x-x_n\right)$$

נסביר זאת: נבחר x'. נניח שזו נקודת דגימה ונבנה פולינום אינטרפולציה חדש, p_1, על $\{x_1,\ldots,x_n,x'\}$. אזי

$$p_1\left(x\right)=p\left(x\right)+f\left[x_0,\ldots,x_n,x'\right]\left(x-x_0\right)\cdots\left(x-x_n\right)$$

בשוויון זה נציב x' ונעביר אגפים ונקבל את מה שרצינו. בנוסף, ראינו שאם $f\in C^n\left[a,b\right]$ אזי

$$f\left[x_0,\ldots,x_n\right]=\frac{f^{(n)}\left(\xi\right)}{n!}$$

כאשר $\xi \in [\min x_i, \max x_i]$. עבור $f(x) = e^{2x}$ בקטע $[0,1]$ נקבל

$$|e(x)| = |f(x_0, \ldots, x_n, x)(x - x_0)\ldots(x - x_n)| = \frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!}|x - x_0|\cdots|x - x_n| \le \sup_{\xi\in[0,1]} \frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!} \le$$
$$\le \frac{2^{n+1}e^2}{(n+1)!} \to 0$$

ולכן בפרט גם נכון על הסופרימום (קיבלנו חסם שלא תלוי בנקודה x), ולכן קיבלנו התכנסות במידה שווה, כמו שרצינו.

2 גזירה נומרית

בהינתן נקודה $\tilde{x}$ ונקודות סמוכות $x_1, \ldots, x_n$, נרצה לקרב את $f'(\tilde{x})$ על ידי

$$f'(\tilde{x}) \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

יש שלוש שיטות - טור טיילור, דיוק אלגברי, ופולינום אופייני. אנחנו ראינו בשיעור את שיטת טיילור.

תרגיל מצאו נוסחת גזירה נומרית המקרבת את $f''(x_0)$ באמצעות ערכי f בנקודות $x_0, x_0 - h, x_0 + h$.

פתרון משתמש בדיוק אלגברי - נמצא את המקדמים כך שהנוסחא מדוייקת על פולינומים ככל האפשרץ יש לנו בסיס למרחב הפולינום $\{1, x, x^2, \ldots\}$. יש לנו שלוש נקודות ולכן נקבל שלוש משוואות, עבור $f = 1, x, x^2$:

$$\begin{aligned}
0 &= A + B + C \\
0 &= A(x_0 - h) + Bx_0 + C(x_0 + h) \\
2 &= A(x_0 - h)^2 + Bx_0^2 + C(x_0 + h)^2
\end{aligned}$$

קיבלנו מערכת ממימד 3, ואותה פותרים ומקבלים

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0 - h) + 2f(x_0) + f(x_0 + h)}{h^2}$$

נעבור לשיטת פולינום האינטרפולציה. נכתוב

$$\begin{aligned}
f(x) &= p(x) + e(x) \\
f'(x) &= p'(x) + e'(x)
\end{aligned}$$

שאלה למה הקירוב שלנו הוא מהצורה

$$p'(x) = \sum A_i f(x_i)$$

תשובה בגלל צורת לגראנז',

$$p\left(x\right)=\sum L_{i}\left(x\right)f\left(x_{i}\right)$$

ואז $L_{i}'\left(x\right)=A_{i}$.

תרגיל הראו שמתקבלת אותה נוסחת גזירה כמו הנוסחה שקיבלנו משיקולי דיוק אלגברי.

פתרון נניח שקיבלנו נוסחת גזירה

$$f'\left(x\right)\approx\sum_{i=0}^{n}A_{i}f\left(x_{i}\right)$$

משיקולי דיוק אלגברי. מהבנייה, היות ויש לנו $n+1$ פרמטרים, אנחנו מדוייקים לכל פולינום ממעלה לכל היותר n. בפרט אנחנו מדוייקים עבור בסיס לגראנז', כלומר

$$L_{j}'\left(x\right)=\sum_{i=0}^{n}A_{i}L_{j}\left(x_{i}\right)=A_{j}$$

וסיימנו.