13/6/2018

הרצאה 12:

השערת רימן

מספר המספרים הראשוניים:

$$\pi(x) := \#\{p \le x \mid \text{ראשוני } p\}$$

אוקלידס:

$$\pi(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty$$

1792 גאוס שיער:

$$\pi(x) \underset{x \to \infty}{\sim} \int_2^x \frac{dt}{\log t} = Li(x)$$

"משפט המספרים הראשוניים": $\lim_{x \to \infty} \pi(x)/Li(x) = 1$

הוכח 189* ע"י Hadamard, de la Vallee Poussin

x	$\pi(x)$	$Li(x) - \pi(x)$
10^8	5,761,455	754
10^{10}	455,052,511	3104
10^{12}	37,607,912,018	38263
10^{16}	279238341033925	3214632

השערה: "השערת רימן"

$$\pi(x) = Li(x) + O\left(x^{\frac{1}{2} + o(1)}\right)$$

Littlewood "1920":

$Li(x) - \pi(x)$ מחליף סימן אינסוף פעמים

Skewes:

שינוי הסימן הראשון $x < 10^{300}$

1858 ברנרד רימן חקר את $\pi(x)$ באמצעות פונקציית ζ

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad Re(s) > 1$$

אוילר 17xx:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s) = \prod_{p \text{ ראשוניים}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} \quad , \quad Re(s)>1$$

הגדרה:

מכפלה $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ מתכנסת בהחלט אם $\sum_n |a_n| < \infty$

טענה:

במקרה כזה $L=\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}(1+a_n)$ קיים, $L\neq 0$.

מסקנה:

$\prod_{p \text{ ראשוני}} \frac{1}{1-p^{-s}}$ מתכנסת בהחלט ושונה מאפס עבור $Re(s)>1$

$$Re(s)>0, \quad \frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{p^{ms}} \Longrightarrow \prod_p = \prod_p\left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\dots\right) =$$

$$= \left(1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{4^s}+\dots\right)\left(1+\frac{1}{3^s}+\dots\right) = 1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}+\dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^s} \ominus, \quad a(n) = \#\{n = p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_r^{k_r}\} = 1$$

המשפט היסודי של האריתמטיקה

$$\ominus \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

מסקנה:

$\zeta(s)\neq 0$ אם $Re(s)>1$.

רימן:

המשכה אנליטית של $\zeta(s)$ לכל $s\in\mathbb{C}$ פרט לקוטב פשוט ב- $s=1$.

הערה:

$\zeta(s)$ אנליטית עבור $Re(s)>1$ (סכום שמתכנס בהחלט ובמ"ש בכל חצי מישור, סגור, $Re(s)\geq 1+\delta$).

משפט: פונקציית שאומה

הפונקציה $\zeta^*(s) := \pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)$ הוא אנליטית בכל $\mathbb{C}$, פרט

לקטבים פשוטים ב- $s=0,1$. מקיימת $\zeta^*(s) = \zeta^*(1-s)$

הוכחה:

נזכיר: $\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-t} t^s \frac{dt}{t}$, $Re(s) > 0$

המשכה אנליטית לכל $\mathbb{C}$ פרט לקטבים פשוטים ב- $s=0,-1,-2,-3,\dots$

$$\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s) \quad , \quad Re(s) > 0$$

אגף ימין מוגדר עבור $Re(s) > -1$ ← $\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}$

מוגדר $Re(s) > -2$ ← $= \frac{\Gamma(s+2)}{(s+1)s}$

$$\pi^{-s/2}\Gamma(\tfrac{s}{2})\cdot\frac{1}{n^s} \Longleftarrow = \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t}\, t^{s/2}\,\frac{dt}{t} \underset{\substack{x=\pi n^2 t\\ \frac{dx}{x}=\frac{dt}{t}}}{=} \int_0^\infty e^{-x}\left(\frac{x}{\pi n^2}\right)^{s/2}\frac{dx}{x}$$

$$= \frac{1}{\pi^{s/2} n^s}\underbrace{\int_0^\infty e^{-x} x^{s/2}\frac{dx}{x}}_{=\Gamma(s/2)}$$

נסכם על $n=1,2,\dots$

$$\pi^{-s/2}\Gamma(\tfrac{s}{2})\underbrace{\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}}_{\zeta(s)} = \int_0^\infty \underbrace{\left(\sum_{n=1}^\infty e^{-\pi t n^2}\right)}_{=\omega(t)} t^{s/2}\,\frac{dt}{t}$$

$$\omega(t) = \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi t n^2} = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\sum_{n=-\infty}^\infty e^{-\pi t n^2}}_{\theta(t)} - 1\Big)$$

משפט: (שהוכחנו)

$$\theta(1/t) = \sqrt{t}\,\theta(t)$$

$$\zeta^*(s) = \int_0^\infty \underbrace{\frac{\theta(t)-1}{2}}_{\omega(t)}\, t^{s/2}\,\frac{dt}{t} \longleftarrow$$

$\omega(t) \underset{t\to\infty}{\sim} e^{-\pi t}$

$\omega(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{2}\cdot 1/\sqrt{t}$

מתכנס כאשר $\frac{s}{2}-\frac{1}{2}>0$

$\longleftrightarrow Re(s) > 1$

נחזור אל המושלמת :

$$\zeta^*(s) = \int_0^1 \omega(t)\, t^{s/2}\frac{dt}{t} + \underbrace{\int_1^\infty \omega(t)\, t^{s/2}\frac{dt}{t}}_{\text{אנליטי לכל } s\in\mathbb{C}}$$

$$\omega(t) = \frac{\theta(t)-1}{2} = \frac{\frac{1}{\sqrt t}\,\theta(1/t)-1}{2}$$

$$\int_0^1 \omega(t)\, t^{s/2}\frac{dt}{t} = \int_0^1 \frac{\frac{1}{\sqrt t}\theta(1/t) - \frac{1}{\sqrt t}}{2}\, t^{s/2}\frac{dt}{t} + \underbrace{\int_0^1 \frac{\frac{1}{\sqrt t}-1}{2}\, t^{s/2}\frac{dt}{t}}_{\substack{\text{אינטגרל פשוט} \\ \frac{1}{s}+\frac{1}{1-s} = ??}}$$

$$= \int_0^1 \frac{\theta(\frac{1}{t})-1}{2}\, t^{\frac{s-1}{2}}\frac{dt}{t} \underset{x=1/t}{=} \int_1^\infty \underbrace{\frac{\theta(x)-1}{2}}_{\omega(x)}\, x^{\frac{1-s}{2}}\frac{dx}{x}$$

$$\Longrightarrow \zeta^*(s) = \underbrace{\int_1^\infty \omega(t)\left\{t^{s/2} + t^{\frac{1-s}{2}}\right\}\frac{dt}{t}}_{\text{מתכנס בהחלט ובמ"ש לכל } \mathbb{C}} + \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s}$$

$\Longleftarrow$ $\zeta^*(s)$ אנליטית לכל $\mathbb{C}$ חוץ מקטבים פשוטים ב- $s=0,1$.

$$\zeta^*(1-s) = \zeta^*(s)$$

■

$\zeta^*(s)=\pi^{-s/2}\,\Gamma(\frac{s}{2})\,\zeta(s)$, ול- $\Gamma(\frac{s}{2})$ יש קטבים פשוטים ב- $s=0,-2,-4,\dots$

אבל ל- $\zeta^*(s)$ אין קטבים ב- $s=-2,-4,-6,\dots$.

$\Longleftarrow$ $\zeta(-2n)=0$, $n=1,2,\dots$ "אפסים טריוויאליים" של $\zeta(s)$.

<u>מסקנה:</u>

$\zeta(s)\neq 0$ עבור $Re(s)<0$, פרט לאפסים הטריוויאליים

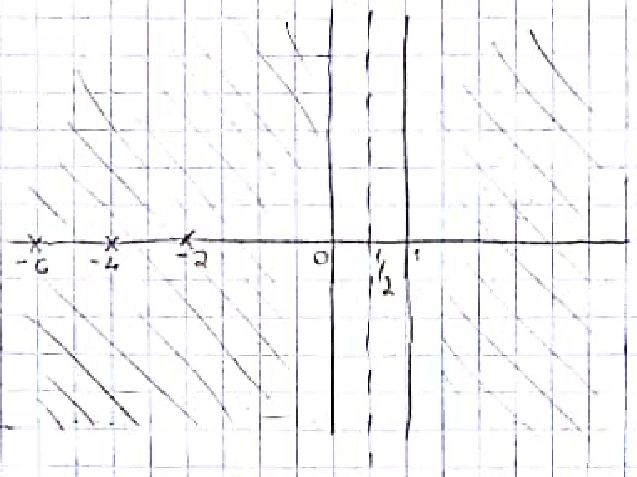
(כי $\zeta(s)\neq 0$ עבור $Re(s)>1$)

האפסים של $\zeta^*(s)$ הם האפסים הלא טריוויאליים של $\zeta(s)$

נמצאים ב- $0\le Re(s)\le 1$ כי $\Gamma(s)\neq 0$ לכל $s\in\mathbb{C}$.

השערת רימן:

כל האפסים הלא טריוויאליים של ζ הם על קו הסימטריה $Re(s) = \frac{1}{2}$



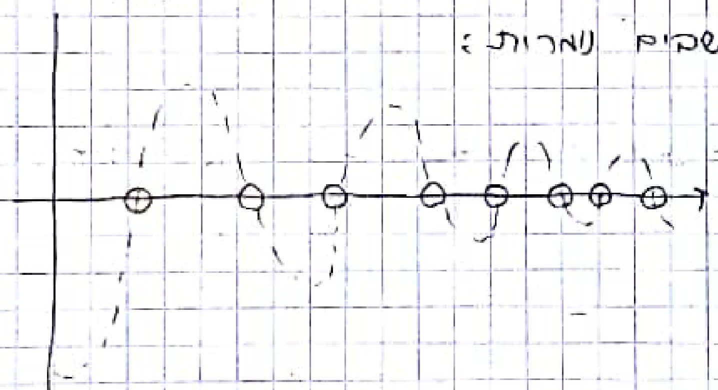
רימן חישב כל האפסים עד $|Im\, s| < 30$: $\frac{1}{2}+14.13 i$, $\frac{1}{2}+21.02.. i$

$\frac{1}{2}+25.01.. i$.

מציאות אפסים:

מחפשים אפסים של $\zeta(\frac{1}{2}+it)$. $e^{i\theta(t)}\zeta(\frac{1}{2}+it) = Z(t)$ – ממשית

עד $t\in\mathbb{R}$. מחשבים נומרית:



משפט רושה: מספר האפסים ב-Ⓢ $= \frac{1}{2\pi i}\oint_{Ⓢ} \frac{f'}{f}$

מחשבים את האינטגרל על תחום סגור, מאשר ידע כמה אפסים צריך להיות בתחום ובוא נוודא שמצאנו מספר מתאים של אפסים.

הנוסחה הפונקציונלית המקורבת (Approximate Functional equation):

$$\zeta(s) = \sum_{1\le n\le X} \frac{1}{n^s} + \gamma(s)\sum_{n\le Y}\frac{1}{n^{1-s}} + O(1/t^{1/4})$$

$$s = \frac{1}{2}+it \quad , \quad XY \approx t$$

הקשר בין $\pi(x)$ לאפסים של $\zeta(s)$

"הנוסחה המפורשת" של רימן $\pi(x) \longleftrightarrow$ אפסים.

The explicit formula

יותר קל לספור חזקות ראשוניים עם משקל.

$$\psi(x) = \sum_{p^k \le x} \log p$$

תרגיל:

$$\psi(x) \sim x \iff \pi(x) \sim Li(x)$$

תרגיל:

$$Li(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log t} = \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right)$$

תרגיל:

$$\psi(x) = \sum_{p<x} \log p + O(\sqrt{x})$$

תרגיל:

$$\pi(x) = Li(x) + O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \iff \psi(x) = x + O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$$

הנוסחה המפורשת של רימן:

$$\psi(x) = x - \sum_{\zeta(\rho)=0} \frac{x^\rho}{\rho} - \underbrace{\frac{\zeta'}{\zeta}(0)}_{\log 2\pi}$$

אם מניחים השערת רימן לגבי האפסים אז:

$$|\psi(x) - x| \le \sum \frac{|x^\rho|}{|\rho|} = \sum \frac{x^{Re(\rho)}}{|\rho|} \le x^{1/2} \sum \frac{1}{|\rho|}$$

גרסה סופית:

$$\psi(x) = x - \sum_{Im(\rho) \le T} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x}{T}\log^2(xT) + \log x\right)$$

נוסחת רימן - Von-Mangoldt:

$$N(T) := \#\{\rho \mid \zeta(\rho)=0,\ 0<Im(\rho)<T\} \underset{T\to\infty}{\sim} \frac{T}{2\pi}\log\left(\frac{T}{2\pi e}\right) + O(\log T)$$

$$\delta(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} y^s \frac{ds}{s} = \begin{cases} 0 & 0<y<1 \\ 1/2 & y=1 \\ 1 & y>1 \end{cases}$$

נגדיר:

$$I(y,T) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} y^s \frac{ds}{s}$$

<u>למה:</u>

$$\left|\delta(y) - I(y,T)\right| < \begin{cases} y^c \cdot \min\left(1, \frac{1}{T|\log y|}\right) \\ \frac{c}{T} & y=1 \end{cases}$$

$$\Longleftarrow \quad \sum_{n\le x} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{2\pi i}\int \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \underbrace{\left(\sum \frac{a_n}{n^s}\right)}_{\overset{!!}{=} A(s)} x^s \frac{ds}{s}$$

<u>תרגיל:</u>

$$Re(s) > 1 \quad , \quad \frac{\zeta'}{\zeta}(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \quad , \quad \Lambda(n) = \begin{cases} \log p & , n=p^k \\ 0 & , \text{else} \end{cases}$$

$$\psi(x) = \sum_{n\le x} \Lambda(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} -\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\, x^s \frac{ds}{s}$$

<u>ישומים של השערת רימן (המוכללת):</u>

<u>השערת אמיל - ארטין:</u>

2 הוא שורש פרימיטיבי מודולו p, לאינסוף ראשוניים p.

$$\#\left\{ p \le x \;\middle|\; \text{2 שורש פרימיטיבי מודולו } p \right\} \overset{??}{\sim} C(2)\cdot \frac{x}{\log x}$$

$$C(2) \approx 0.37\ldots = \prod_{\ell \text{ ראשוני}} \left(1 - \frac{1}{\ell(\ell-1)}\right)$$

1967 - Hooley הוכיח ש- GRH גורר את השערת אמיל-ארטין

פונקצית מביוס Möbius :

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^k & n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k, \quad p_i \neq p_j \\ 0 & \text{otherwise}. \end{cases}$$

$M(x) := \sum_{n \le x} \mu(n) =$ ההפרש בין מספר חסרי ריבועים עם מספר זוגי / אי זוגי של גורמים ראשוניים.

$$\text{PNT} \iff M(x) = o(x)$$

השערה: $\text{RH} \iff M(x) \ll x^{1/2+\varepsilon}$

רעיון: $$\sum_{n \le x} \mu(n) = \int \underbrace{\sum \frac{\mu(n)}{n^s}}_{1/\zeta(s)} x^s \frac{ds}{s}$$