משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

© ארזים

15 במרץ 2017

1 הגדרות בסיסיות

הגדרה 1.1 משוואה דיפרנציאלית היא משוואה עבור נגזרות הפונקציה.

דוגמא למשוואה דיפרנציאלית:

$$y''(x) + \ln^2(x) e^{y(x)} = 0$$

הגדרה 1.2 משוואה דיפרנציאלית תקרא רגילה כאשר מופיעות בה נגזרות רק לפי משתנה אחד.

משוואה דיפרנציאלית תקרא חלקית כאשר מופיעות בה נגזרות חלקיות לפי יותר ממשתנה אחד.

דוגמא למשוואה דיפרנציאלית חלקית:

$$u_{t,t}(x,t) = c^2 u_{x,x}$$

משוואה זו נקראת משוואת הגלים.

הגדרה 1.3 הסדר של משוואה דיפרנציאלית רגילה הוא הסדר של הנגזרת הגבוהה ביותר שמופיעה בו.

דוגמא למשוואה דיפרנציאלית רגילה מסדר 3:

$$y'''(x) + (y')^8 + y^{17} = 0$$

צורה כללית של משוואה דיפרנציאלית מסדר n:

$$F\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right) = 0$$

דוגמא למשוואה דיפרנציאלית רגילה מסדר 2:

$$y'^3 + e^{y^2 y''} + \sin\left(1 + y'' y\right) = 3$$

במקרה הזה קשה, ואף אי אפשר, לחלץ את הנגזרת הגבוהה ביותר.

אנחנו לא נטפל במקרים כאלה, אלא רק במשוואות דיפרנציאליות שניתן להביא לצורה סטנדרטית:

$$y^{(n)}\left(x\right) = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \tag{1}$$

סימון נסמן $\phi\left(x\right) \in C^n$ אם ϕ גזירה ברציפות n פעמים.

הגדרה 1.4 $\phi\left(x\right)$ היא פתרון של (1) בקטע $a \leq x \leq b$ אם $\phi \in C^n\left[a, b\right]$, ואם מתקיים

$$\phi^n\left(x\right) = f\left(x, \phi, \phi', \ldots, \phi^{(n-1)}\right)$$

לכל $a < x < b$.

דוגמא ניקח את המשוואה הדיפרנציאלית

$$y''\left(x\right) + \alpha^2 y = 0$$

אזי $y = \cos\left(\alpha x\right)$ היא פתרון בקטע $-\infty < x < \infty$.

הגדרה 1.5 המשוואה הדיפרנציאלית הרגילה $f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ הוא לינארי אם F היא קומבינציה לינארית של המשתנים $y, y', \ldots, y^{(n)}$.

דוגמא לשתי משוואות דיפרנציאליות רגילות לא לינאריות, ואחת לינארית:

$$y'' = yy'$$
$$\ddot{\theta}\left(t\right) + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$
$$y'' + xy = 0$$

המשוואה השנייה נקראת משוואת המטוטלת, והשלישית נקראת משוואת Airy.

המשמעות של הסימון $\dot{}$ היא $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$.

משוואה לינארית כללית מסדר n:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\left(x\right) y^{(n-i)}\left(x\right) = g\left(x\right)$$

הגדרה 1.6 אם $g\left(x\right) \equiv 0$ המשוואה היא הומוגנית. אחרת היא לא הומוגנית.

רוב התורה לגבי משוואות דיפרנציאליות רגילות היא עבור משוואות לינאריות.

1.1 סוגי בעיות

1.1.1 בעיית תנאי התחלה

כאשר יש משוואה מהצורה

$$y^{(n)}(x) = f\left(x, y, \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

וכן n תנאי התחלה:

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y'_0 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_0^{(n-1)} \end{aligned}$$

אין צורך לתת את ערך הנגזרת האחרונה, שכן ניתן למצוא אותו על ידי הצבה.

1.1.2 בעיית תנאי שפה

כאשר יש משוואה בקטע מסויים, $x_0 < x < x_1$, ושני תנאי שפה מהצורה:

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ y(x_1) &= y_1 \end{aligned}$$

בקורס נטפל בעיקר בבעיות תנאי התחלה.

2 משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון

מדובר במשוואות מהצורה

$$y' = f(x, y)$$

ונתון תנאי

$$y(x_0) = y_0$$

אפילו עבור מקרה פשוט זה לא תמיד יש פיתרון מפורש.

2.1 משוואה דיפרנציאלית לינארית מסדר ראשון

2.1.1 מקרה ראשון

$f=f\left(x\right)$ רציפה, $y'=f\left(x\right)$, ואז

$$y=\int^{x}f\left(t\right)\,\mathrm{d}t+c$$

למציאת c, נשתמש בתנאי ההתחלה:

$$y\left(x\right)=\int_{x_0}^{x}f\left(t\right)\,\mathrm{d}t+y_0$$

זה מבחינתנו פתרון.

דוגמא

$$y'=\sin\left(2x\right)$$
$$y=-\frac{1}{2}\cos\left(2x\right)+c$$

נניח כי תנאי ההתחלה הוא

$$y\left(0\right)=0$$

נקבל כי

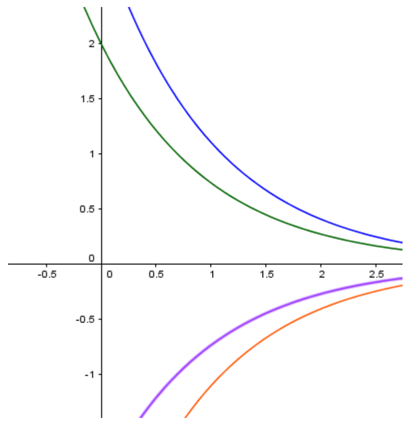
$$0=y\left(0\right)=-\frac{1}{2}\cos\left(0\right)+c=-\frac{1}{2}+c$$
$$c=\frac{1}{2}$$

כלומר נקבל כי

$$y=-\frac{1}{2}\cos\left(2x\right)+\frac{1}{2}$$

2.1.2 מקרה שני

$$y'+ay=0$$



איור 1: חלק מהעקומות האפשריות

כאשר a קבוע. אם $y \neq 0$, נוכל לקבל

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} &= -a \\ (\ln y)' &= -a \\ \ln y &= -ax + c \\ |y| &= e^{-ax}e^{c} = \tilde{c} \cdot e^{-ax} \end{aligned}$$

כאשר $\tilde{c}$ קבוע. $y = 0$ הוא גם כן פתרון, ונכלל במקרה כללי - ניקח $\tilde{c} = 0$.
האם ייתכן כי $y = 0$ רק לעיתים?
לא. אם $\tilde{c} = 0$ אזי $y = 0$. אם $\tilde{c} \neq 0$, אזי $y \neq 0$ תמיד.
כרגע קיבלנו אוסף של עקומות אפשריות (כמו באיור 1).
על ידי בחירת תנאי התחלה, נוכל לקבוע את הקבוע ולהיצמד לעקומה אחת. השאלה היא מתי והאם יש יחידות - ועל זה נדבר בהמשך.

דוגמא דעיכה רדיואקטיבית: בזמן $t = 0$ יש N_0 מולקולות רדיואקטיביות. כמה יהיו בזמן t?

הנחות: לכל מולקולה רדיואקטיבית יש הסתברות של $r\Delta t$ להתפרק בקטע זמן באורך Δt. נניח כי r זהה לכל המולקולות, וכי התפרקות מולקולה היא בלתי תלוייה במולקולות האחרות, ובמשך הזמן שהמולקולה כבר קיימת.
נתבונן בכמות המולקולות שהתפרקו בקטע $[t, t + \Delta t]$:

$$\begin{aligned} N(t) - N(t + \Delta t) &= N(t) \cdot r\Delta t \\ \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} &= -rN(t) \end{aligned}$$

ניקח גבול כאשר $\Delta t \to 0$, ונקבל

$$N'(t) = -rN(t)$$

נניח כי $N(0)=N_0$. לכן נקבל

$$N(t)=N_0e^{-rt}$$

איך נמצא את r? נמדוד $N(0)$, $N(t)$, ואז

$$\begin{aligned}N(t)&=N(0)e^{-rt}\\ \ln\left(\frac{N(t)}{N(0)}\right)&=-rt\\ r&=\frac{\ln N(0)-\ln N(t)}{t}\end{aligned}$$

על השימוש בתוצאה זו לשם תיארוך ארכיאולוגי בשיטת פחמן 14 ניתן פרס נובל לכימיה בשנת 1960.

2.1.3 מקרה שלישי

$$y'+ay=g(x)$$

הרעיון: נניח שקיימת $h(x)$ כך שמתקיים

$$h(x)(y'+ay)=(h(x)y)'$$

אם נוכל לעשות זאת, נכפול את המשוואה מקורית פי $h(x)$ ונקבל

$$(hy)'=hg$$

וזה המקרה הראשון. כיצד נמצא h שכזו?

$$\begin{aligned}hy'+hay&=h'y+hy'\\ hay&=h'y\\ (h'-ah)y&=0\end{aligned}$$

זה יתקיים בפרט אם $h'-ah=0$, וזה המקרה השני. הפתרון הוא

$$h=ce^{ax}$$

דרוש לנו רק פתרון אחד, ולכן נוכל לבחור $c=1$. לכן את המשוואה המקורית נוכל לכפול פי e^{ax}. גורם שכזה נקרא גורם אינטגרציה - הוא מאפשר לנו לבצע אינטגרציה.

לכן, נכפיל פי e^{ax} ונקבל

$$\begin{aligned} e^{ax}\left(y'+ay\right) &= e^{ax}g \\ \left(e^{ax}y\right)' &= e^{ax}g \\ e^{ax}y\left(x\right) &= \int^{x} e^{at}g\left(t\right)\,\mathrm{d}t+c \\ y\left(x\right) &= e^{-ax}\int^{x} e^{at}g\left(t\right)\,\mathrm{d}t+ce^{-ax} \end{aligned}$$

2.1.4 מקרה רביעי

המקרה הכללי:

$$y'+p\left(x\right)y=g\left(x\right)$$

נחפש $h\left(x\right)$ שתקיים

$$\begin{aligned} h\left(x\right)\left(y'+p\left(x\right)y\right) &= \left(hy\right)' \\ hy'+hpy &= h'y+y'h \\ hpy &= h'y \end{aligned}$$

לכן מספיק למצוא h עבורו

$$\begin{aligned} hp &= h' \\ p &= \frac{h'}{h} \end{aligned}$$

צריך כי $h\neq 0$, אבל אנחנו מחפשים רק h אחד - נוודא בהמשך שנבחר אחד שלא מתאפס.

$$\begin{aligned} \left(\ln h\right)' &= p \\ \ln h &= \int^{x} p\left(t\right)\,\mathrm{d}t+c \end{aligned}$$

נבחר כעת $c=0$, כלומר

$$h=e^{\int^{x}p\left(t\right)\mathrm{d}t}$$

וזה אכן לא מתאפס.

נכפיל את המשוואה המקורית פי h ונקבל:

$$\begin{aligned}(hy)' &= hg\\ hy &= \int^{x} h(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t + c\\ y(x) &= \frac{1}{h(x)}\left(\int^{x} h(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t + c\right)\\ y(x) &= e^{-\int^{x} p(t)\,\mathrm{d}t}\left(\int^{x} e^{\int^{t} p(s)\,\mathrm{d}s} g(t)\,\mathrm{d}t + c\right)\end{aligned}$$

אם נוסיף תנאי התחלה $y(x_0) = y_0$, נדאג שכל האינטגרלים יתחילו מהנקודה x_0, ונקבל

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t}\left(\int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{t} p(s)\,\mathrm{d}s} g(t)\,\mathrm{d}t + c\right)$$

נציב תנאי התחלה:

$$y_0 = y(x_0) = e^{-\int_{x_0}^{x_0} p(t)\,\mathrm{d}t}\left(\int_{x_0}^{x_0} e^{\int_{x_0}^{t} p(s)\,\mathrm{d}s} g(t)\,\mathrm{d}t + c\right) = 1\cdot(0+c) = c$$

כעת פתרנו לחלוטין את המקרה של משוואה דיפרנציאלית רגילה לינארית מסדר ראשון.
נתבונן במקרה הפרטי הבא:

$$\begin{aligned}y' + p(x)\,y &= 0\\ y(x_0) &= y_0\end{aligned}$$

לפי הפתרון של המקרה הכללי שמצאנו, נקבל

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t} y_0$$

נסמן

$$s(x, x_0) = e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t}$$

ואז נקבל

$$y(x) = s(x, x_0)\,y_0$$

כלומר s היא גורם שמעביר פתרון בזמן x_0 לפתרון בזמן x.
נתבונן כעת במקרה הכללי הלא הומוגני:

$$y\left(x\right)=s\left(x,x_0\right)y_0+\int\limits_{x_0}^{x}e^{\left(\int_{x_0}^{t}p-\int_{x_0}^{x}p\right)}g\left(t\right)\,\mathrm{d}t=$$
$$=s\left(x,x_0\right)y_0+\int\limits_{x_0}^{x}e^{-\int_{t}^{x}p}g\left(t\right)\,\mathrm{d}t=s\left(x,x_0\right)y_0+\int\limits_{x_0}^{x}s\left(x,t\right)g\left(t\right)\,\mathrm{d}t$$

למעשה קיבלנו מצב בו לוקחים את הפתרון ההומוגני, ומשלימים אותו בעזרת רצף של תנאי התחלה חדשים (האינטגרל). זה נקרא עקרון דוהמל, והוא פותר משוואות דיפרנציאליות רגילות וחלקיות לינאריות לא הומוגניות. נוכיח אותו בעתיד.

דוגמא תורת המכרזים: אנחנו נדבר על מכרז מחיר ראשון. יש n שחקנים, וכל אחד נותן הצעה במעטפה סגורה. זוכה השחקן בעל ההצעה הגבוהה ביותר, ומשלם את ההצעה שלו. שאר המשתתפים לא משלמים שום דבר.
כמה כדאי להציע?
מניחים שלכל שחקן יש ערך v עבור החפץ, שרק השחקן יודע. כל השחקנים יודעים את ההתפלגות $F\left(v\right)$ עבור הערכים של שאר השחקנים.
מתקיים $F\left(0\right)=0,F\left(1\right)=1$, $F'\left(v\right)>0$. במצב זה ניתן להראות כי האסטרטגיה לשיווי משקל, אם b היא פונקציית ההצעה לפי ערך, נתונה על ידי

$$\begin{aligned}v'\left(b\right)&=\frac{1}{n-1}\frac{F\left(v\left(b\right)\right)}{F'\left(v\left(b\right)\right)}\frac{1}{v\left(b\right)-b}\\v\left(0\right)&=0\end{aligned}$$

זו משוואה דיפרנציאלית רגילה מסדר ראשון, אבל היא אינה לינארית. כעת, נכתוב משוואה עבור הפונקציה ההפוכה $b\left(v\right)$:

$$\begin{aligned}b'\left(v\right)&=\frac{1}{v'\left(b\right)}\\b'\left(v\right)&=\frac{\left(n-1\right)F'\left(v\right)}{F\left(v\right)}\left(v-b\left(v\right)\right)\end{aligned}$$

וזו משוואה דיפרנציאלית רגילה לינארית. הפתרון שמתקבל, ויהיה בשיעורי הבית, הוא

$$b\left(v\right)=v-\frac{\int_0^v F^{n-1}\left(s\right)\,\mathrm{d}s}{F^{n-1}\left(v\right)}$$

למשל $F\left(0\right)=v$, מתקיים

$$b=\left(1-\frac{1}{n}\right)v$$