משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

ⓒ ארזים

27 באפריל 2017

ראינו שכל משוואה דיפרנציאלית רגילה מסדר n שקולה למערכת של n משוואות מסדר ראשון. לכן, למשל, כדי להוכיח משפט קיום ויחידות עבור משוואה מסדר n, אפשר להוכיח את המשפט על מערכת של n משוואות מסדר ראשון. באותו אופן, כדי לפתור נומרית משוואה מסדר n, מספיק שנדע לפתור נומרית מערכות של n משוואות מסדר ראשון.

נתונה המערכת $y_i'(x) = f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$, עם תנאי התחלה $y_i(x_0) = y_0^i$. נעבור למערכת האינטגרלית השקולה:

$$y_i(x) = y_0^i + \int\limits_{x_0}^{x} f_i(t, y_1, \ldots, y_n)\, \mathrm{d}t$$

נבצע איטרציות פיקרד:

$$y_i^{(k+1)}(x) = y_0^i + \int\limits_{x_0}^{x} f_i\left(t, y_1^{(k)}, \ldots, y_n^{(k)}\right) \mathrm{d}t$$

נח לעבוד בסימונים ווקטוריים:

$$\begin{aligned} \underline{y} &= (y_1, \ldots, y_n) \\ \underline{f} &= (f_1, \ldots, f_n) \\ \underline{y_0} &= \left(y_0^1, \ldots, y_0^n\right) \end{aligned}$$

ואז איטרציות פיקרד הן

$$\underline{y}^{(k+1)}(x) = \underline{y_0} + \int\limits_{x_0}^{x} \underline{f}\left(t, \underline{y}^{(k)}\right) \mathrm{d}t$$

תנאי ליפשיץ - נגיד שפונקציה סקלרית $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ מקיימת תנאי ליפשיץ לפי $y_1, \ldots, y_n$ בתחום $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ אם עבור כל שתי נקודות בתוך D בעלות אותו ערך x,

$$(x, y_1, \ldots, y_n), (x, y_1', \ldots, y_n')$$

מתקיים

$$\left|f\left(x,y_1,\ldots,y_n\right)-f\left(x,y_1',\ldots,y_n'\right)\right|\le\sum L_i\left|y_i-y_i'\right|$$

כאשר L_i קבועים.
משפט קיום ויחידות לוקלי למערכת מסדר ראשון:
נתונה המערכת

$$y_i'\left(x\right)=f_i\left(x,y_1,\ldots,y_n\right)$$
$$y_i\left(x_0\right)=y_0^{(i)}$$

תהי $D\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ התחום הסגור המוגדרת על ידי $|x-x_0|\le a$, $\left|y_i-y_0^i\right|\le b$. נניח כי f_i כולן רציפות בתוך D ומקיימות שם תנאי ליפשיץ לפי $y_1,\ldots,y_n$. נסמן בתור M את החסם המשותף של $|f_i|$ על D. יהי $\alpha=\min\left\{a,\frac{b}{M}\right\}$. אזי קיים פתרון אחד ויחיד של המערכת בקטע $|x-x_0|\le\alpha$.

ההוכחה זהה למקרה הסקלרי. מה לגבי קיום ויחידות עבור משוואה מסדר n? אם יש לנו המערת $y^{(n)}\left(x\right)=f\left(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}\right)$, נפתור על ידי הפיכה למערכת משוואות לינאריות - משמע בשביל קיום ויחידות צריך רציפות של f וכן ליפשיציות שלה לפי $y_1,\ldots,y_n$.

דוגמא ניקח $y''=-yy'^3-2x^2y^2$. אזי

$$f\left(x,y,y'\right)=-yy'^3-2x^2y^2$$

כאן מסתכלים על x,y,y' כעל בלתי תלויים. f כמובן רציפה. היא צריכה להיות ליפשיץ במשתנים y,y'. זה מתקיים, כי הנגזרות לפי המשתנים הללו חסומות בתחום (כי הן רציפות). לכן יש ליפשיץ.

משפט 0.1 (משפט קיום ויחידות עבור משוואה מסדר n) נתונה המשוואה $y^{(n)}=f\left(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}\right)$ עם n תנאי התחלה. יהי $D\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ התחום המוגדר על ידי $|x-x_0|\le a$, $\left|y_i-y^{(i)}\right|\le b$.

נניח כי f רציפה בתוך D, $|f|\le M$ על D, והיא מקיימת שם תנאי ליפשיץ לפי $y,y',\ldots,y^{(n-1)}$. אזי קיים פתרון אחד ויחיד של המערכת בקטע $|x-x_0|\le\alpha$ כאשר

$$\alpha=\min\left\{a,\frac{b}{M+b+\sum\left|y_0^{(j)}\right|}\right\}$$

ההוכחה נובעת מהמקרה של n משוואות מסדר ראשון.

באופן דומה נובע גם משפט קיום ויחידות גלובלי בשכבה אינסופית.

נתבונן במערכת של n משוואות לינאריות מסדר ראשון:

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}=a_{11}\left(x\right)y_1+a_{12}\left(x\right)y_2+\cdots+a_{1n}\left(x\right)y_n+b_1\left(x\right)$$
$$\vdots$$

ניתן לרשום באופן קומפקטי יותר

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x}=\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(x\right)y_j\right)+b_i\left(x\right)$$

אם המקדמים $a_{ij}\left(x\right),b_i\left(x\right)$ רציפים בקטע $[a,b]$, $x_0\in[a,b]$ אזי לכל $\left\{y_0^i\right\}$ תנאי התחלה קיים פתרון יחיד בקטע $a\le x\le b$. שוב ההוכחה דומה מאוד למקרה של משוואה יחידה.

נתבונן כעת במקרה של משוואה מסדר 2. $y''=f\left(x,y,y'\right)$ היא המערכת. המקרה הכי פשוט הוא אם $y''\left(x\right)=g\left(x\right)$, אזי פשוט עושים אינטגרל ומקבלים שני קבועים שרירותיים. איך הם נקבעים - בשיעור הבא.