משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

© ארזים

4 במאי 2017

1 משוואות לינאריות מסדר 2 עם מקדמים קבועים

נתבונן במשוואה

$$Lu = au'' + bu' + cu = 0$$

כאשר a, b, c קבועים. משפט קיום ויחידות מבטיח שכל פתרון קיים גלובלית, כלומר עבור כל $x \in \mathbb{R}$. נחפש פתרון מהצורה $u = e^{rx}$. מתקיים

$$L\left(e^{rx}\right) = e^{rx}\left(ar^2 + br + c\right) = 0$$

$e^{rx} \neq 0$, ולכן יש לפתור את $l\left(r\right) = ar^2 + br + c = 0$. זה נקרא הפולינום האופייני של המשוואה, או של L. כמובן, $l\left(r\right) = 0$ אם ורק אם $u = e^{rx}$ פתרון של המשוואה. אנחנו יודעים את נוסחת השורשים:

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

נפריד למקרים:

1. $b^2 - 4ac > 0$: יש שני שורשים ממשיים (פשוטים - מריבוי 1) ושונים זה מזה. אזי יש לנו שני פתרונות, $\{e^{r_1 x}, e^{r_2 x}\}$, ובבירור הם בלתי תלויים (למשל, הם לא פרופרוציוניים, או שהוורונסקיאן שלהם לא מתאפס). לכן, הפתרון הכללי הוא

$$u = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

דוגמא

$$\begin{aligned} u'' - 5u' + 6u &= 0 \\ l\left(r\right) = r^2 - 5r + 6r &= 0 \\ r_{1,2} &= 2, 3 \end{aligned}$$

ולכן הפתרון הכללי הוא

$$u = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

2. $b^2 - 4ac = 0$: יש שורש ממשי יחיד (כפול - מריבוי 2). פתרון זה הוא $r_1 = -\frac{b}{2a}$. אז פתרון אחד הוא $u_1 = e^{r_1 x}$. ניתן למצוא פיתרון נוסף על ידי הורדת סדר. יש דרך אחרת למצוא פתרון שני: ראינו

$$L\left[e^{rx}\right] = e^{rx} l\left(r\right) = e^{rx} a\left(r - r_1\right)^2$$

נגזור את שני האגפים לפי r:

$$L\left[xe^{rx}\right] = axe^{rx}\left(r - r_1\right)^2 + 2ae^{rx}\left(r - r_1\right) = ae^{rx}\left(r - r_1\right)\left(x\left(r - r_1\right) + 2\right)$$

נציב $r = r_1$ ונקבל

$$L\left[xe^{r_1 x}\right] = 0$$

לכן הפתרון השני הוא $u_2 = xe^{r_1 x}$ והוא בלתי תלוי באותו u_1 שמצאנו קודם. לכן זו מערכת יסודית.

3. $b^2 - 4ac < 0$: שני הפתרונות הם מרוכבים וצמודים זה לזה. נסמן

$$r_1 = \lambda + i\mu$$
$$r_2 = \lambda - i\mu$$

כאשר λ, μ ממשיים. אזי נקבל

$$u_1 = e^{r_1 x} = e^{(\lambda + i\mu)x} = e^{\lambda x} e^{i\mu x} = e^{\lambda x}\left(\cos\left(\mu x\right) + i\sin\left(\mu x\right)\right)$$
$$u_2 = e^{r_2 x} = e^{(\lambda - i\mu)x} = e^{\lambda x} e^{-i\mu x} = e^{\lambda x}\left(\cos\left(\mu x\right) - i\sin\left(\mu x\right)\right)$$

כעת, u_1, u_2 בסיס, ולכן גם $\frac{u_1 + u_2}{2}, \frac{u_1 - u_2}{2i}$ בסיס. נקבל את הבסיס הבא:

$$e^{\lambda x}\cos\left(\mu x\right), e^{\lambda x}\sin\left(\mu x\right)$$

קיבלנו בסיס ממשי של הפתרונות.

דוגמא נפתור את

$$\begin{aligned} u'' + 9u &= 0 \\ l\left(r\right) &= r^2 + 9 \\ r_{1,2} &= \pm 3i \\ \lambda &= 0, \mu = 3 \\ u\left(x\right) &= c_1\cos\left(3x\right) + c_2\sin\left(3x\right) \end{aligned}$$

נשים לב שמתקיים

$$e^{\lambda x}\cos(\mu x) = \operatorname{Re}\left(e^{(\lambda+i\mu)x}\right)$$
$$e^{\lambda x}\sin(\mu x) = \operatorname{Im}\left(e^{(\lambda+i\mu)x}\right)$$

זה לא מקרה.

משפט 1.1 אם במשוואה הלינארית

$$L[y] = y'' + py' + qy = 0$$

הפונקציות p, q הן ממשיות, ואם

$$\phi(x) = u(x) + iv(x)$$

הוא פתרון מרוכב של המשוואה, כאשר u, v ממשיות, אזי u, v הן פתרונות של המשוואה.

הוכחה:

$$0 = L[\phi] = L[u+iv] = L[u] + iL[v]$$

לכן נקבל $L[u] = L[v] = 0$. ■

1.1 משוואת אוילר הומוגנית

נתבונן במשוואה

$$\alpha x^2 y''(x) + \beta x y'(x) + \gamma y(x) = 0$$

כאשר $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. נחלק את המשוואה בגורם x^2:

$$\alpha y'' + \frac{\beta}{x} y' + \frac{\gamma}{x^2} y = 0$$

נסמן $p = \frac{\beta}{x}$, $q = \frac{\gamma}{x^2}$. אלה אינן רציפות בנקודה 0, ולכן ייתכן שהפתרון יישבר שם. נניח כי $\tilde{y}(x)$ הוא פתרון עבור $x > 0$. כדי לפתור עבור $x < 0$ נגדיר $s = -x$, ואז $s > 0$, והמשוואה עבור $y(s)$ היא

$$\alpha s^2 y_{ss} + \beta s y_s + \gamma y = 0$$

זו בדיוק אותה משוואה כמו קודם. לכן עבור $x<0$, $y(x)=\tilde{y}(-x)=\tilde{y}(|x|)$ הוא פתרון. כלומר, הפתרון שקיבלנו עבור $x>0$ תקף גם עבור $x<0$, כאשר מציבים $|x|$. לכן מספיק לפתור עבור $x>0$. בתחום זה נבצע את ההצבה $x=e^t$. כלומר:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}=e^t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}=x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}&=\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2=x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)=\\ &=x^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\end{aligned}$$

לכן,

$$\begin{aligned}xy'&=y_t\\ x^2y''&=y_{tt}-y_t\end{aligned}$$