משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

© ארזים

1 ביוני 2017

1 מערכות משוואות לינאריות

יש לנו את המערכת $x' = Px$, כאשר x ווקטור, P מטריצה (שניהם של פונקציות). מימד מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית הזו הוא n. אם $\{x_1, \ldots, x_n\}$ פתרונות של המערכת, הם תלויים לינארית אם ורק אם קיים t_0 עבורו $\{x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)\}$ תלויים לינארית. כיוון שמרחב הפתרונות הוא לינארי ממימד n, כל קבוצה של n פתרונות בלתי תלויים פורשים אותו. קבוצה כזו תיקרא מערכת בסיסית. אם הקבוצה הזו מקיימת $x_i(t_0) = e_i$ ווקטור הבסיס הסטנדרטי, היא תיקרא מערכת בסיסית יסודית. ניזכר שהגדרנו את הוורונסקיאן של המערכת:

$$W(t) = \det(x_1(t), \ldots, x_n(t))$$

כאשר $x_1, \ldots, x_n$ פתרונות. אם כן, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ תלויים לינארית אם ורק אם קיים t_0 עבורו $\{x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)\}$ תלויים לינארית, אם ורק אם $W(t_0) = 0$, אם ורק אם (את המעבר הזה נוכיח תיכף בדרך אחרת) $W(t) = 0$, אם ורק אם קיים ווקטור לא טריוויאלי המקיים

$$(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = 0$$

וזה אם ורק אם הם תלויים לינארית.

משפט 1.1 אם $\{x_1, \ldots, x_n\}$ פתרונות של המערכת ההומוגנית בקטע I, אזי בקטע זה $W(x_1, \ldots, x_n)$ הוא זהותית אפס או לא אפס בכלל.

הוכחה: ראינו עכשיו הוכחה לזה, אבל נראה הוכחה אחרת עם נוסחת אבל: נוכיח שמתקיים

$$W(t) = ce^{\int^t \operatorname{tr}(P)(s)\,\mathrm{d}s}$$

ואז המשפט ברור. נכתוב

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \ldots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

$$W'(t) = \sum_{i=1}^{n} \det W_i(t)$$

כאשר W_i מתקבלת מתוך W על ידי גזירת השורה i.
נזכור שאותם x הם פתרונות של המערכת

$$x' = Px$$

$$(x')_1 = P_1 x = \sum_{j=1}^{n} P_{1,j} x_j$$

לכן נקבל למשל שהשורה הראשונה של W_1 היא

$$\left(\sum_{j=1}^{n} P_{1,j} x_{j,i}\right)_{i=1}^{n}$$

לכן נוכל לכתוב את הדטרמיננטה שלה כסכום, ממולטילינאריות הדטרמיננטה. נוכל לשים לב שכל המטריצות שייתקבלו יהיו בעלות שורות כפולות, חוץ מהראשונה, כלומר

$$\det W_1(t) = P_{11}(t) W(t)$$

נוכל לעשות בדיוק את אותו תהליך לשאר המטריצות W_i ולקבל בסך הכל

$$W'(t) = \operatorname{tr}(P)(t) W(t)$$

$$\frac{W'}{W} = \operatorname{tr}(P)$$

$$\ln W = \int^{t} \operatorname{tr}(P) + \tilde{c}$$

$$W = ce^{\int^{t} \operatorname{tr}(P)}$$

■

2 פתרון מערכת לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים

עכשיו המערכת היא $x' = Ax$, כאשר A מטריצה קבועה.
ראשית נניח כי A אלכסונית,

$$A = D = \operatorname{diag}(r_1, \ldots, r_n)$$

אז נקבל

$$x' = Dx$$

או מפורשות:

$$x_i' = r_i x_i$$

כלומר נקבל

$$x_i = c_i e^{r_i t}$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$x = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{r_j t} e_j$$

כעת נניח כי המטריצה לכסינה, משמע יש בסיס u_i של ווקטורים עצמיים שמתאימים לערכים העצמיים r_i. נסמן $D = \operatorname{diag}(r_1, \ldots, r_n)$, ונסמן T את מטריצת המעבר לבסיס זה. אז

$$A = TDT^{-1}$$

אנחנו רוצים לפתור את

$$x' = Ax = TDT^{-1}x$$
$$y' = T^{-1}x' = DT^{-1}x = Dy$$

ואת זה כבר פתרנו. נקבל

$$y = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{r_j t} e_j = T^{-1}x$$
$$x = Ty = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{r_j t} u_j$$

מסקנה 2.1 הבעיה שלנו שקולה ללכסון A.

דרך אחרת לראות את זה: נפתור שוב את $x' = Ax$. נחפש פתרון מהצורה $x = e^{rt}(\xi_i)_{i=1}^n$ כאשר ξ_i קבועים. נציב במשוואה ונקבל

$$r(\xi_i)_{i=1}^n e^{rt} = Ae^{rt}(\xi_i)_{i=1}^n$$

כלומר $(\xi_i)_{i=1}^n$ ווקטור עצמי עם ערך עצמי r של A.