משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

ארזים ©

8 ביוני 2017

1 משוואות מטריציאליות

אנחנו עובדים עם המשוואה $x' = P(t)\, x$, כאשר x ווקטור, P מטריצה. לקחנו $\{x_1, \ldots, x_n\}$ פתרונות בלתי תלויים (מערכת יסודית) המקיימים

$$x_j(0) = e_j$$

ואז הגדרנו

$$\Psi = (x_1, \ldots, x_n)$$

מטריצה. ראינו שמתקיים

$$\Psi' = P\Psi$$
$$\Psi(0) = I$$

ולכן הפתרון של המערכת

$$x' = Px$$

עם תנאי ההתחלה

$$x(0) = x_0$$

עבור ווקטור x_0 מסויים הוא

$$x = \Psi x_0$$

נדון עכשיו במקרה בו $P(t)$ מטריצה קבועה, שנסמנה A. כלומר המערכת היא

$$x' = Ax$$
$$x(0) = x_0$$

ראינו שבמצב הסקלרי הדומה, הפתרון הוא $x = e^{at}x_0$. היינו רוצים לומר שהפתרון כאן הוא

$$x = e^{At}x_0$$

אבל מה זה e^{At}?

הגדרה 1.1 נשתמש בהגדרה הטבעית של e^x כטור טיילור ונגדיר

$$e^{At} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(tA)^m}{m!}$$

נראה בהמשך שזה מתכנס ושהכל בסדר. בינתיים נניח לרגע שזה מתכנס. אזי

$$\left(e^{tA}\right)' = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m A^m}{m!}\right)' = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^{m-1} A^m}{(m-1)!} = A \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j A^j}{j!} = Ae^{tA}$$

מסקנה 1.2 המטריצה e^{tA} היא הפתרון של

$$\begin{aligned} \Psi' &= A\Psi \\ \Psi(0) &= I \end{aligned}$$

מסקנה 1.3 מתקיים $e^{tA} = (x_1, \ldots, x_n)$ כאשר x_i הם הפתרונות של

$$\begin{aligned} x_i &= Ax_i \\ x_i(0) &= e_i \end{aligned}$$

מסקנה 1.4 הווקטור $x = e^{At}x_0$ הוא הפתרון של

$$\begin{aligned} x' &= Ax \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

דוגמא ראינו את המערכת $x' = Ax$, עבור $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, וראינו את הפתרונות

$$\begin{aligned} x_1' &= e^{3t}(1,2)^T \\ x_2' &= e^{-t}(1,-2)^T \end{aligned}$$

כדי למצוא את e^{At}, צריך שני פתרונות בלתי תלויים עם $x_i = e_i$. אפשר למצוא אותם ולקבל

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{x_1 + x_2}{2} = \begin{pmatrix} \frac{e^{3t}+e^{-t}}{2} \\ e^{3t} - e^{-t} \end{pmatrix} \\ x_2 &= \frac{x_1 - x_2}{4} = \begin{pmatrix} \frac{e^{3t}-e^{-t}}{4} \\ \frac{e^{3t}+e^{-t}}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ומכאן נקבל

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \frac{e^{3t}+e^{-t}}{2} & \frac{e^{3t}-e^{-t}}{4} \\ e^{3t}-e^{-t} & \frac{e^{3t}+e^{-t}}{2} \end{pmatrix}$$

תרגיל אם $D = \operatorname{diag}(d_i)$ אזי $e^D = \operatorname{diag}\left(e^{d_i}\right)$.

כעת נרצה להוכיח את ההתכנסות של e^{At}. בשביל זה נרצה להראות שני דברים: התכנסות של $\left(e^{tA}\right)_{i,j}$, והתכנסות במידה שווה עבור $|t| \le \alpha$.

הגדרה 1.5 נורמה מטריציאלית היא פונקציה $||\cdot|| : M_{n\times n} \to \mathbb{R}^+$ המקיימת

1. $||A|| \ge 0$ לכל A וכן $A = 0 \iff ||A|| = 0$.
2. $||A+B|| \le ||A|| + ||B||$.
3. $||cA|| = |c|\,||A||$ לכל $c \in \mathbb{R}$.
4. $||AB|| \le ||A||\,||B||$.

נעיר שדרישות 1,2,3 הן של כל נורמה, והרביעית מיוחדת.

דוגמאות יש המון נורמות מטריציאליות. למשל:

$$||A||_F = \sqrt{\sum_{i,j} a_{i,j}^2}$$

$$||A||_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$$

אפשר להראות שהנורמות האלה מקיימות את ההגדרה (נראה בתרגול). נשתמש למשל בנורמת $||\cdot||_F$. נשים לב כי

$$|A_{ij}| \le ||A||_F$$

לכן

$$\left|\left(\frac{A^k t^k}{k!}\right)_{i,j}\right| \le \left|\left|\frac{A^k t^k}{k!}\right|\right|_F \le \frac{|t|^k}{k!}\,||A||_F^k$$

ומכאן

$$\left|\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{t^m A^m}{m!}\right)_{i,j}\right| \le \sum_{m=0}^{\infty}\frac{|t|^m\,||A||_F^m}{m!} \le e^{|t|\,||A||_F} \le e^{|\alpha|\,||A||_F}$$

ולכן אכן יש התכנסות במידה שווה ובהחלט (בוחרים את α שרירותית, ולכן הראינו התכנסות במידה שווה ובהחלט בכל רדיוס שנרצה). נראה כעת שההגדרה מקיימת את תכונות האקספוננט.

למה 1.6

$$e^{tA}e^{sA}=e^{(t+s)A}$$

הוכחה: נתייחס אל s כקבוע, ואל t כמשתנה בלתי תלוי. נתבונן במשוואה

$$\Psi'=A\Psi$$
$$\Psi\left(0\right)=e^{sA}$$

שני האגפים של השוויון בלמה הם פתרונות של המשוואה, ולכן הם מזדהים. לראיה:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{tA}e^{sA}\right)=Ae^{tA}e^{sA}=Ae^{tA}e^{sA}$$

■

מכאן נקבל גם, עבור $s=-t$:

$$e^{tA}e^{-tA}=e^{0A}=I$$

ולכן

$$e^{-tA}=\left(e^{tA}\right)^{-1}$$

1.1 משוואות לא הומוגניות

כעת המשוואה היא

$$x'=Ax+g$$

עבור ווקטור $g\left(t\right)$. נרצה לחשב פתרון בעזרת e^{tA}. אנחנו יודעים שהפתרון של המשוואה ההומוגנית הוא $x_H=e^{tA}\cdot c$ עבור ווקטור c. לכן נשתמש בווריאציית הפרמטרים ונחפש פתרון מהצורה

$$x_p=e^{tA}c\left(t\right)$$