משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

© ארזים

23 במרץ 2017

1 משוואות מדויקות

נמשיך מהשיעור שעבר: נתונה משוואה לא מדוייקת

$$M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y = 0$$

מחפשים $\mu(x,y)$ שעבורה המשוואה הבאה מדוייקת:

$$\mu M\mathrm{d}x + \mu N\mathrm{d}y = 0$$

כלומר נרצה שיתקיים

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x$$
$$\mu_y M + \mu M_y = \mu_x N + \mu N_x$$

זו משוואה דיפרנציאלית חלקית לינארית. קשה לפתור דבר כזה.
האם בכלל אמור להיות קיים גורם אינטגרציה?

טענה 1.1 למשוואה שלעיל תמיד קיים גורם אינטגרציה μ.

הוכחה: בהמשך הקורס נוכיח משפט קיום ויחידות פתרון למשוואה מהצורה הזו. נסמן את הפתרון $F(x,y(x)) = c$. נגזור לפי x:

$$F_x + F_y y' = 0$$

כלומר

$$-\frac{M}{N} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{F_x}{F_y}$$

כלומר

$$\frac{F_x}{M} = \frac{F_y}{N} = \mu(x,y)$$

ואז

$$F_x = M\mu$$
$$F_y = N\mu$$

והמשוואה מדוייקת. ■

ניתן לחשב את גורם האינטגרציה במקרים מיוחדים.

1. נניח $\mu = \mu(x)$, כלומר $\mu_y = 0$.

$$\mu M_y = \mu_x N + \mu N_x$$
$$\mu(M_y - N_x) = \mu_x N$$
$$\frac{\mu_x}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{N}$$
$$\mu = e^{\int^x \frac{M_y - N_x}{N}}$$

דוגמא

$$\underbrace{(y + xy + \sin y)}_{M}\mathrm{d}x + \underbrace{(x + \cos y)}_{N}\mathrm{d}y = 0$$

$$M_y = 1 + x + \cos y$$
$$N_x = 1$$

ולכן המשוואה לא מדוייקת. נבדוק האם קיים $\mu = \mu(x)$.

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{x + \cos y}{x + \cos y} = 1$$

וזה לא תלוי במשתנה y, ולכן יש $\mu = \mu(x)$. נגדיר

$$\mu = e^{\int^x \frac{M_y - N_x}{N}} = e^{\int^x 1} = e^x$$

לכן

$$e^x(y + xy + \sin y)\,\mathrm{d}x + e^x(x + \cos y)\,\mathrm{d}y = 0$$

מדוייקת. לבית, וודאו שזו אכן מדוייקת ושהפתרון הוא

$$F = xye^x + e^x \sin y = c$$

יש מקרים פרטיים נוספית, למשל $\mu = \mu\left(x^2 + y^2\right)$ או באופן כללי $\mu = \mu(w(x,y))$ כאשר $w(x,y)$ פונקציה נתונה.

2 פתרון בעזרת הצבה

דוגמא נתבונן במשוואה

$$y'(x) = f(ax + by + c)$$

כאשר a, b, c קבועים. נציב

$$\begin{aligned} v(x) &= ax + by + c \\ v'(x) &= a + by' = a + bf(ax + by + c) = a + bf(v) \end{aligned}$$

זו משוואה מופרדת, ולכן ניתן לפתור אותה:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}v}{a + bf(v)} &= \mathrm{d}x \\ \int^{v} \frac{\mathrm{d}v}{a + bf(v)} &= x + c \end{aligned}$$

נבדוק פתרונות סטציונריים - אם קיים α עבורו $a + bf(\alpha) = 0$, אזי $v(x) = \alpha$ פתרון. אז

$$y = \frac{v - ax - c}{b} = \frac{\alpha - ax - c}{b}$$

פתרון של המשוואה.

לא נתעסק כאן בעוד שיטות הצבה - נראה בתרגול כמה.

3 רציפות ויחידות

נתבונן במערכת

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

שאלות לגבי המשוואה:

1. האם קיים פתרון?
2. האם ייתכן שקיים יותר מפתרון אחד (יחידות)?
3. האם הפתרון משתנה באופן רציף כתלות בערכים f, y_0 (רציפות)?

נתחיל לדון בשאלות 2,3.

הגדרה 3.1 פונקציה $f(x,y)$ מקיימת תנאי ליפשיץ בתחום $D\subseteq\mathbb{R}^2$ אם קיים קבוע $L\geq 0$ כך שלכל זוג נקודות $(x,y_1),(x,y_2)\in D$ מתקיים

$$\left|f(x,y_1)-f(x,y_2)\right|\leq L\left|y_2-y_1\right|$$

נעיר שיש כאן אותו x בשתי הנקודות, L בלתי תלוי בנקודה (x,y)וכן y בלתי תלוי בערך x.

למה 3.2 תהי $f(x,y)$ גזירה ברציפות בתחום חסום סגור וקמור D. אזי f מקיימת תנאי ליפשיץ בתחום D עם

$$L=\sup_D\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$$

הוכחה: נתבונן בהפרש

$$F(x,y_2)-F(x,y_1)$$

ממשפט ערך הביניים של לגראנז' מתקיים

$$F(x,y_2)-F(x,y_1)=(y_2-y_1)\frac{\partial f}{\partial y}(x,\theta)$$

כאשר $y_1<\theta<y_2$ לכן

$$\left|F(x,y_2)-F(x,y_1)\right|\leq\left|y_2-y_1\right|\sup_D\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$$

■

לכן נקבל כי גזירות גוררת ליפשיץ, אבל ההיפך לא בהכרח נכון. $F(y)=|y|$ ליפשיך אבל לא גזירה.

ליפשיץ גורר גם רציפות, ונותן לנו חסם על קצב ההתכנסות של $f(y_n)\to f(y)$ אם $y_n\to y$.

למה 3.3 תהי $\sigma(x)$ פונקציה גזירה המקיימת את אי השוויון הדיפרנציאלי

$$\sigma'(x)\leq L\sigma(x)$$

כאשר $x_0\leq x$, L קבוע. אזי

$$\sigma(x)\leq\sigma(x_0)e^{L(x-x_0)}$$

לכל $x_0\leq x$.

הוכחה: כשעובדים עם אי שוויונים מותר לעשות אינטגרל אבל לא לגזור. אם כן,

$$\sigma' - L\sigma \leq 0$$

נכפיל בגורם אינטגרציה:

$$\begin{aligned} e^{-Lx}\left(\sigma' - L\sigma\right) &\leq 0 \\ \left(e^{-Lx}\sigma\right)' &\leq 0 \\ e^{-Lx}\sigma\left(x\right) &\leq e^{-Lx_0}\sigma\left(x_0\right) \\ \sigma\left(x\right) &\leq \sigma\left(x_0\right)e^{L\left(x-x_0\right)} \end{aligned}$$

■

משפט 3.4 (רציפות בתנאי ההתחלה) יהי $y_0\left(x\right), y_1\left(x\right)$ שני פתרונות של $y' = f\left(x,y\right)$.
אם f מקיים תנאי ליפשיץ עם קבוע L, אזי

$$\left|y_2\left(x\right) - y_1\left(x\right)\right| \leq e^{L\left|x-x_0\right|}\left|y_2\left(x_0\right) - y_1\left(x_0\right)\right|$$