# משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

ⓒ ארזים

29 במרץ 2017

## 1 רציפות ויחידות

בשיעור שעבר ראינו:

**למה 1.1** תהי $\sigma(x)$ פונקציה גזירה המקיימת את אי השוויון הדיפרנציאלי

$$\sigma'(x) \leq L\sigma(x)$$

כאשר $x_0 \leq x$. אזי

$$\sigma(x) \leq \sigma(x_0) e^{L(x-x_0)}$$

**משפט 1.2** (רציפות בתנאי התחלה) יהיו $y_1(x)$, $y_2(x)$ שני פתרונות של $y' = f(x,y)$. אם $f$ מקיימת תנאי ליפשיץ עם קבוע $L$ אזי

$$|y_2(x) - y_1(x)| \leq e^{L|x-x_0|} |y_2(x_0) - y_1(x_0)|$$

**הוכחה:** נגדיר

$$\sigma(x) = (y_2(x) - y_1(x))^2$$

לכן

$$\sigma'(x) = 2(y_2 - y_1)(y_2' - y_1') = 2(y_2 - y_1)(f(x,y_2) - f(x,y_1))$$

ומכאן

$$\begin{aligned}\sigma' &\leq 2|y_2 - y_1||f(x,y_2) - f(x,y_1)| \leq 2|y_2 - y_1| \cdot L|y_2 - y_1| = \\ &= 2L(y_2 - y_1)^2 = 2L\sigma\end{aligned}$$

לכן בסך הכל נקבל כי

$$\sigma' \leq 2L\sigma$$

ולכן מהלמה

$$\sigma \leq \sigma(x_0) e^{2L(x-x_0)}$$

עבור $x \geq x_0$.
נוציא שורש ונקבל

$$|y_2(x) - y_1(x)| \leq |y_2(x_0) - y_1(x_0)| e^{L|x-x_0|}$$

לכן סיימנו עבור $x \geq x_0$. עבור $x < x_0$, נבצע החלפת משתנים $x \mapsto -x$ ונקבל

$$s = -x$$

ואז

$$y' = -f(-s, y) = \tilde{f}(s, y)$$

וכעת באגף ימין עדיין יש פונקציה ליפשיץ. ההוכחה שלנו נכונה כעת עבור

$$\begin{aligned} s &\geq -x_0 \\ -x &\geq -x_0 \\ x &\leq x_0 \end{aligned}$$

■

המשפט מראה שהפתרון רציף בתנאי ההתחלה. כלומר, שאם $y_2(x_0) \to y_1(x_0)$ אזי $y_2(x) \to y_1(x)$ - שינויים קטנים בתנאי ההתחלה מביאים לשינויים קטנים בפתרון.
הקבוע הכיפלי עלול להיות אדול אקספוננציאלית.

**מסקנה 1.3** (יחידות) נתונה בעיית תנאי ההתחלה:

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

אם $f$ מקיימת תנאי ליפשיץ, אז קיים לכל היותר פתרון אחד.

**הוכחה:** נניח שיש שני פתרונות $y_1, y_2$. לפי משפט קודם

$$|y_2(x) - y_1(x)| \le e^{L|x-x_0|} |y_2(x_0) - y_1(x_0)| = 0$$

כאשר $L$ קבוע הליפשיץ של $L$. לכן $y_2(x) = y_1(x)$. ■

לכן, מרציפות בתנאי התחלה נובעת יחידות.

**משפט 1.4** (אי שוויון גרונוול) יהיו $\delta, \varepsilon, L \ge 0$. אזי כל פתרון של אי השוויון האינטגרלי

$$E(x) \le \delta + \varepsilon x + L \int\limits_0^x E(s)\ \mathrm{d}s$$

כאשר $x \ge 0$ מקיים גם את החסם

$$E(x) \le \delta e^{Lx} + \varepsilon \frac{e^{Lx-} - 1}{L}$$

**הוכחה:** נגדיר

$$G(x) = \int\limits_0^x E(s)\ \mathrm{d}s$$

ואז

$$G'(x) \le \delta + \varepsilon x + LG(x)$$

אזי

$$\begin{aligned} G'(x) - LG(x) &\le \delta + \varepsilon x \\ \left(Ge^{-Lx}\right)' &= e^{-Lx}(\delta + \varepsilon x) \\ G(x)e^{-Lx} - G(0)e^{-0} &\le \int\limits_0^x e^{-Ls}(\delta + \varepsilon s)\ \mathrm{d}s \\ Ge^{-Lx} &\le \delta \frac{1 - e^{-Lx}}{L} + \varepsilon \frac{1 - (1 + Lx)e^{-Lx}}{L^2} \\ G &\le \delta \frac{e^{Lx} - 1}{L} + \frac{\varepsilon}{L} \frac{e^{Lx} - 1 - Lx}{L} \end{aligned}$$

כעת נציב את החסם עבור $G\left(x\right)$ באי שוויון המקורי ונקבל

$$E\left(x\right)\leq\delta+\varepsilon x+LG\leq\delta+\varepsilon x+\delta\left(e^{Lx}-1\right)+\varepsilon\frac{e^{Lx}-\left(1+Lx\right)}{L}=$$
$$=\delta e^{Lx}+\varepsilon\frac{e^{Lx}-1}{L}$$

■

**משפט 1.5** (רציפות חזקה יותר) יהיו $y_1,y_2$ פתרונות של

$$y_i'=f_i\left(x,y_i\right)$$

בקטע $[a,b]$. נניח שלכל $a\leq x\leq b$ ולכל $y\in\mathbb{R}$ מתקיים:

1. $f_1$ או $f_2$ מקיימות תנאי ליפשית עם קבוע $L$.
2. $$\left|f_2\left(x,y\right)-f_1\left(x,y\right)\right|\leq\varepsilon$$

כמו כן, נניח כי עבור $x_0\in[a,b]$ מתקיים

$$\left|y_2\left(x_0\right)-y_1\left(x_0\right)\right|\leq\delta$$

אזי לכל $a\leq x\leq b$ מתקיים

$$\left|y_2\left(x\right)-y_1\left(x\right)\right|\leq\delta e^{L\left|x-x_0\right|}+\frac{\varepsilon}{L}\left(e^{L\left|x-x_0\right|}-1\right)$$

**הוכחה:** בלי הגבלת הכלליות, $x_0=0$, כי אחרת נגדיר $\tilde{x}=x-x_0$. כמו כן, בלי הגבלת הכלליות, $x>0$, כי אחרת נגדיר $\tilde{x}=-x$. לבסוף, בלי הגבלת הכלליות, $f_1$ ליפשיץ. כעת,

$$\left|y_2\left(x\right)-y_2\left(0\right)-\int\limits_0^x f_1\left(s,y_2\left(s\right)\right)\,\mathrm{d}s\right|=\left|\int\limits_0^x\left(y_2'\left(s\right)-f_1\left(s,y_2\left(s\right)\right)\right)\,\mathrm{d}s\right|=$$
$$=\left|\int\limits_0^x f_2\left(s,y_2\right)-f_1\left(s,y_2\right)\,\mathrm{d}s\right|\leq\int\limits_0^x\left|f_2\left(s,y_2\right)-f_1\left(s,y_2\right)\,\mathrm{d}s\right|\leq$$
$$\leq\varepsilon\int\limits_0^x\mathrm{d}s=\varepsilon x$$

כעת נגדיר

$$E(x)=|y_2(x)-y_1(x)|$$

וכעת

$$\begin{aligned}E(x)&=|A-B+C+D|\\ A&=\left(y_2(x)-y_2(0)-\int\limits_0^x f_1(s,y_2(s))\,\mathrm{d}s\right)\\ B&=\left(y_1(x)-y_1(0)-\int\limits_0^x f_1(s,y_1(s))\,\mathrm{d}s\right)\\ C&=(y_2(0)-y_1(0))\\ D&=\left(\int\limits_0^x f_1(s,y_2(s))\,\mathrm{d}s-\int\limits_0^x f_1(s,y_1(s))\,\mathrm{d}s\right)\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}E(x)&\leq|A|+|B|+|C|+|D|\leq\\ &\leq\varepsilon x+0+\delta+\int\limits_0^x|f_1(s,y_2)-f_1(s,y_1)|\leq\\ &\leq\varepsilon x+\delta+L\int\limits_0^x|y_2-y_1|=\varepsilon x+\delta+L\int\limits_0^x E(s)\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

לכן התוצאה נובעת מתוך אי שוויון גרונוול. $\blacksquare$

## 2 קיום פתרונות

נתבונן במערכת

$$\begin{aligned}y'&=f(x,y)\\ y(x_0)&=y_0\end{aligned}$$

נניח כי:

1. $f(x,y)$ רציפה כפונקציה כל שני משתנים בלתי תלויים.
2. $y(x)$ רציפה.

לכן, נובע כי $f\left(x,y\left(x\right)\right)$ רציפה בנקודה $x$, ולכן אינטגרבילית.

$$\int_{x_0}^{x} y'\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x} f\left(s,y\left(s\right)\right)\,\mathrm{d}s$$

$$y\left(x\right) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(s,y\left(s\right)\right)\,\mathrm{d}s$$

הוכחנו שאם $y$ פתרון של המערכת שלמעלה, הוא פתרון גם של המשוואה הזו. בכיוון ההפוך, נניח כי $y$ פתרון של המשוואה האחרונה. $f\left(x,y\left(x\right)\right)$ רציפה, ולכן ניתן לגזור את שני צדדי המשוואה:

$$y'\left(x\right) = f\left(x,y\left(x\right)\right)$$

וכן אם נציב $x = x_0$ נקבל

$$y\left(x_0\right) = y_0$$

לכן יש גרירה גם בכיוון ההפוך. לכן נותר לנו לפתור את המשוואה אינטגרלית הזו. אינטואיטיבית, עדיף לפתור דברים אינטגרליים, כי אינטגרל הוא אופרטור יפה, בניגוד לגזירה ־ הוא שומר חסמים.

## 2.1 שיטת האיטרציות של פיקארד

$$\begin{aligned}
y_0\left(x\right) &= y_0 \\
y_1\left(x\right) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(s,y_0\left(s\right)\right)\,\mathrm{d}s \\
&\vdots \\
y_n\left(n\right) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(s,y_{n-1}\left(s\right)\right)\,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

הרעיון ־ אם הסדרה מתכנסת לאיזושהי פונקציה $y\left(x\right)$, אזי

$$y\left(x\right) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(s,y\left(s\right)\right)\,\mathrm{d}s$$

כמו שרצינו.

**משפט 2.1** (קיום ויחידות לוקלי) נתון המלבן

$$R=[x_0-a,x_0+a]\times[y_0-b,y_0+b]$$

ונניח כי $f(x,y)$ מוגדרת ורציפה בתוך $R$, ומקיימת שם תנאי ליפשיץ עם קבוע $L$. נסמן

$$M=\max_{(x,y)\in R}|f(x,y)|$$
$$\alpha=\min\left\{a,\frac{b}{M}\right\}$$

אזי בקטע $I_\alpha=[x_0-\alpha,x_0+\alpha]$ קיים למשוואה $y'=f(x,y)$ פתרון יחיד המקיים $y(x_0)=y_0$.

**הערה 2.2** $\max_R|f|$ סופי כי $f$ רציפה (משפט ויירשטראס). המשפט מבטיח קיום לוקלי בלבד, כי אולי $\alpha<a$.

הערך של $\alpha$ תלוי אולי בגודל $M$, אבל לא בחסם $L$.

**הוכחה:** נוכיח קיום פתרון עבור $x\in[x_0,x_0+\alpha]$ - בחצי השני של הקטע ההוכחה נובעת על ידי $x\mapsto -x$ (בדקו).

ראשית, נוכיח שלכל $n$, הפונקציה $y_n(x)$, איטרציית פיקרד בשלב $n$, היא מוגדרת, רציפה ומקיימת

$$|y_n(x)-y_0|\le b$$

נעשה זאת באינדוקציה.

בסיס: $n=0$ - ברור:

$$|y_0(x)-y_0|=0$$

צעד: נניח נכוונת עבור $y_n$. כעת,

$$y_{n+1}(x)=y_0+\int\limits_{x_0}^{x}f(s,y_n(s))\,\mathrm{d}s$$

על פי הנחת האינדוקציה, $y_n(x)$ מוגדרת ורציפה, ומקיימת $|y_n(x)-y_0|\le b$. לכן $f(s,y_n(s))$ מוגדרת, רציפה וחסומה. לכן $y_{n+1}(x)$ מוגדרת ורציפה. כמו כן

$$|y_{n+1}(x)-y_0|\le\int\limits_{x_0}^{x}|f|\le M(x-x_0)\le M\alpha\le b$$

כעת, נוכיח כי לכל $x \in I_\alpha$ מתקיים

$$\left|y_{n+1}\left(x\right)-y_n\left(x\right)\right| \le \frac{ML^n\left(x-x_0\right)^{n+1}}{\left(n+1\right)!}$$

נוכיח שוב באינדוקציה. בסיס:

$$\left|y_1\left(x\right)-y_0\left(x\right)\right| = \left|\int\limits_{x_0}^{x} f\left(s,y_0\right)\,\mathrm{d}s\right| \le M\left(x-x_0\right)$$

כעת, נניח נכונות עבור $n$, ונוכיח את הצעד:

$$\begin{aligned}
\left|y_{n+1}\left(x\right)-y_n\left(x\right)\right| &= \left|\int\limits_{x_0}^{x} \left(f\left(s,y_n\left(s\right)\right)-f\left(s,y_{n-1}\left(s\right)\right)\right)\,\mathrm{d}s\right| \le \\
&\le \int\limits_{x_0}^{x} \left|\left(f\left(s,y_n\left(s\right)\right)-f\left(s,y_{n-1}\left(s\right)\right)\right)\right|\,\mathrm{d}s \le \\
&\le L\int\limits_{x_0}^{x} \left|y_n\left(s\right)-y_{n-1}\left(s\right)\right|\,\mathrm{d}s \le \\
&\le L\int\limits_{x_0}^{x} \frac{ML^{n-1}\left(x-x_0\right)^n}{n!}\,\mathrm{d}s = \\
&= \frac{ML^n\left(x-x_0\right)^{n+1}}{\left(n+1\right)!}
\end{aligned}$$

המשך בשיעור הבא. ■