משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

ⓒ ארזים

30 במרץ 2017

נמשיך מאיפה שעצרנו. **הוכחה:** נראה כי האיטרציות

$$y_n = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\left(s, y_{n-1}\left(s\right)\right)\,\mathrm{d}s$$

מתכנסות. ראינו כי הן מוגדרות, רציפות ומקיימות

$$\left|y_n\left(x\right) - y_0\right| \leq b$$

כמו כן

$$\left|y_{n+1}\left(x\right) - y_n\left(x\right)\right| \leq \frac{ML^n\left(x - x_0\right)^{n+1}}{\left(n+1\right)!}$$

לכן

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|y_{n+1}\left(x\right) - y_n\left(x\right)\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{ML^n\left(x - x_0\right)^{n+1}}{\left(n+1\right)!} = \frac{M}{L}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(L\alpha\right)^{n+1}}{\left(n+1\right)!} = \frac{M}{L}\left(e^{L\alpha} - 1\right)$$

לכן מבוחן M של ויירשטראס נקבל כי הטור באגף שמאל מתכנס בהחלט ובמידה שווה על הקטע I_α. לכן הסדרה

$$y_n\left(x\right) - y_0 = \sum_{m=0}^{n-1}\left(y_{n+1}\left(x\right) - y_n\left(x\right)\right)$$

מתכנסת במידה שווה בקטע I_α. נסמן $y\left(x\right) = \lim y_n\left(x\right)$. אזי,

$$y_n\left(x\right) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\left(s, y_{n-1}\left(s\right)\right)\,\mathrm{d}s$$

ניקח גבול:

$$y\left(x\right)=y_0+\int\limits_{x_0}^{x}f\left(s,y\left(s\right)\right)\,\mathrm{d}s$$

ולכן קיבלנו פיתרון למשוואה שרצינו. בנוסף, $y\left(x\right)$ רציפה, כי היא גבול במידה שווה של פונקציות רציפות.

ראינו כבר כי הליפשיציות של f נותנת יחידות של הפתרון. נוכיח כעת בדרך שונה, תוך שימוש בהצגה האינטגרלית. נניח כי $\overline{y}$ פתרון נוסף של המשוואה.. אזי

$$\overline{y}\left(x\right)-y\left(x\right)=\int\limits_{x_0}^{x}\left(f\left(s,\overline{y}\left(s\right)\right)-f\left(s,y\left(s\right)\right)\right)\,\mathrm{d}s$$

$$\left|\overline{y}\left(x\right)-y\left(x\right)\right|=\int\limits_{x_0}^{x}\left|\left(f\left(s,\overline{y}\left(s\right)\right)-f\left(s,y\left(s\right)\right)\right)\right|\,\mathrm{d}s\le L\int\limits_{x_0}^{x}\left|\overline{y}\left(s\right)-y\left(s\right)\right|\,\mathrm{d}s\le$$
$$\le L\left|x-x_0\right|\max_{x\in[x_0,x]}\left|\overline{y}\left(x\right)-y\left(x\right)\right|$$

נוכיח תחילה יחידות עבור $x\in I_L=\left\{\left|x-x_0\right|\le\frac{1}{2L}\right\}$. שם:

$$\left|\overline{y}\left(x\right)-y\left(x\right)\right|\le L\frac{1}{2L}\max\left|\overline{y}\left(x\right)-y\left(x\right)\right|$$

זה נכון לכל $x\in I_L$. לכן

$$\max\left|\overline{y}-y\right|\le\frac{1}{2}\max\left|\overline{y}-y\right|$$
$$\max\left|\overline{y}-y\right|=0$$

כעת, נוכל להזיז את תנאי ההתחלה לצדדים בקפיצות של $\frac{1}{2L}$, ולקבל יחידות בקטעים שהולכים וגדלים - ולכן בסופו של דבר נכסה את הכל. ■

משפט 0.1 (משפט קיום ויחידות לשכבה אינסופית) נתונה השכבה האינסופית

$$R=[a,b]\times\left(-\infty,\infty\right)$$

תהי $f\left(x,y\right)$ רציפה על R, ומקיימת תנאי ליפשיץ עם קבוע L. תהי $x_0\in[a,b]$. אזי לכל $y_0\in\mathbb{R}$ קיים פתרון יחיד למערכת

$$y'\left(x\right)=f\left(x,y\left(x\right)\right)$$
$$y\left(x_0\right)=y_0$$

ופתרון זה מוגדר בכל הקטע $[a,b]$.

הוכחה: דומה מאוד לקודמת. הבדל אחד הוא שכעת $|f|$ לא חסומה בתחום. היכן השתמשנו בזה?

1. $y_n(x)$ מוגדרת, רציפה, וכן $(x, y_n(x)) \in R$. זה ינבע מיידית באינדוקציה מהנוסחה עבור y_n, כי אין הגבלה על ערכי y. כמו כן, מאותה סיבה, אנחנו לא צריכים את ההגבלה של $|x - x_0| \le \alpha$, וניתן להוכיח ישירות עבור $x \in [a, b]$.

2. כאשר הוכחנו כי לכל $x \in I_\alpha$ מתקיים

$$|y_{n+1}(x) - y(x)| \le \frac{ML^n (x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

הוכחנו באינדוקציה: בבסיס,

$$|y_1(x) - y_0(x)| = \left| \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y_0) \, \mathrm{d}s \right|$$

הפונקציה $f(x, y_0)$ תלוייה רק במשתנה x וכן רציפה, ולכן חסומה על $[a, b]$. לכן נוכל לחסום

$$|y_1(x) - y_0(x)| \le M(x - x_0)$$

בצעד האינדוקציה כבר לא הסתמכנו על החסימות, אלא רק על הליפשיציות. לכן כל שאר ההוכחה כמו קודם.

■

המשפט הזה לא דורש תנאי ליפשיץ גלובלי בכל השכבה, ולכן, למשל, לא תופס עבור $f = y^2$. למשוואה שזה מגדיר כן קיים הפתרון $y = \frac{1}{1-x}$, אם $y(0) = 1$, אבל הפתרון לא קיים בקטע $[-2, 2]$, למרות שהפונקציה f גזירה שם.

מסתבר שאת דרישת הליפשיץ צריך רק בשביל יחידות. יש משפט כללי:

משפט 0.2 (משפט הקיום של פיאנו) נתונה המערכת

$$y'(x) = f(x, y)$$
$$y(x_0) = y_0$$

אם f רציפה על $[x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ וכן על מלבן זה $|f(x, y(x))| \le M$, אזי קיים לפחות פתרון אחד למערכת בקטע $\left[x - \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, x + \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}\right]$ שמקיים את ההתחלה.

דרשנו פחות (רק רציפות ולא ליפשיץ) וקיבלנו פחות (רק קיום ולא יחידות). לא נוכיח את המשפט, אבל נראה את האיטרציות שבהן משתמשים - איטרציות טונלי. עבור $x \in [0, \alpha]$:

$$y_n(x) = \begin{cases} y_0 & x \in \left[0, \frac{\alpha}{n}\right] \\ y_0 + \int_0^{x - \frac{\alpha}{n}} f(s, y_n(s)) & otherwise \end{cases}$$

דוגמא נתבונן במשוואה

$$y' = y^{\frac{1}{3}}$$
$$y(1) = 3$$

$f(x,y) = y^{\frac{1}{3}}$ רציפה בכל נקודה, והנגזרת לפי y רציפה בכל נקודה שאינה 0. לכן, לפי פיקארד, קיים פתרון יחיד סביב $(x_0, y_0) = (1,3)$.