משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

© ארזים

19 באפריל 2017

1 דוגמאות ליחידות/חוסר יחיסות הפתרון

דוגמה נתבונן במערכת

$$y' = y^{\frac{1}{3}}$$
$$y(1) = 3$$

$f(x,y) = y^{\frac{1}{3}}$ במצב זה. פונקציה זו רציפה לכל x,y, והנגזרת שלה לפי y רציפה עבור $y \neq 0$. לכן, על פי משפט קיום ויחידות, קיים פתרון יחיד בסביבה של $(1,3)$.
נפתור: $y=0$ פתרון, אבל לא מקיים תנאי התחלה. לכן נוכל לחלק:

$$\frac{y'}{y^{\frac{1}{3}}} = 1$$

ניקח אינטגרל $\mathrm{d}x$:

$$\frac{3}{2}y^{\frac{2}{3}} = x + c$$

נציב את תנאי ההתחלה:

$$\frac{3}{2}3^{\frac{2}{3}} = 1 + c$$
$$c = \frac{3}{2}3^{\frac{2}{3}} - 1$$

כלומר

$$y^{\frac{2}{3}} = x + \frac{3}{2}3^{\frac{2}{3}} - 1$$
$$y = \pm\left(x + \frac{3}{2}3^{\frac{2}{3}} - 1\right)^{\frac{3}{2}}$$

הפתרון עם מינוס הוא שלילי, ולא מקיים את תנאי ההתחלה. לכן הפתרון הוא

$$y=\left(x+\frac{3}{2}3^{\frac{2}{3}}-1\right)^{\frac{3}{2}}$$

פתרון זה מוגדר עבור $x>1-\frac{3}{2}3^{\frac{2}{3}}$. בהמשך נתייחס למה שקורה בצד השני של הנקודה הזו.

דוגמה נשנה את תנאי ההתחלה:

$$\begin{aligned}y'&=y^{\frac{1}{3}}\\ y\left(x_0\right)&=0\end{aligned}$$

כעת, לא נוכל להפעיל את משפט הקיום והיחידות, כי $f_y\left(x,y\right)$ לא חסומה באף סביבה של $\left(x_0,y_0\right)$. עם זאת, הפונקציה f רציפה וחסומה, ולכן נוכל להפעיל את משפט פיאנו ולקבל שקיים פתרון, לאו דווקא יחיד. כעת, $y=0$ כן פתרון. כמו כן, אם נציב את תנאי ההתחלה בפתרון שמצאנו קודם:

$$c=-x_0$$

ואז

$$y=\pm\left(\frac{2}{3}\left(x-x_0\right)\right)^{\frac{3}{2}}$$

ושני אלה טובים עבור $x>x_0$. לכן יש 3 פתרונות שעוברים בנקודה $\left(x_0,0\right)$. נשים לב שנוכל להגדיר את y להיות 0 לפני x_0 ולקבל פתרון C^1. כמו כן, היינו יכולים להחליט כי y היא 0 עד a כלשהו שגדול יותר מאשר x_0, ואחריו מתחיל להיות הפתרון שלעיל. כלומר, יש אינסוף פתרונות, מהצורה

$$y\left(x;a\right)=\begin{cases}\pm\left(\frac{2}{3}\left(x-a\right)\right)^{\frac{3}{2}} & x>a\\ 0 & x\leq a\end{cases}$$

כאשר $a>x_0$. בדוגמא הראשונה היינו יכולים להרחיב בצורה יחידה:

$$y\left(x\right)=\begin{cases}\left(\frac{2}{3}\left(x+\frac{3}{2}3^{\frac{2}{3}}-1\right)\right)^{\frac{3}{2}} & x>1-\frac{3}{2}3^{\frac{2}{3}}\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

2 קיום ואי קיום גלובלי

אנו מתבוננים במערכת

$$\begin{aligned}y'&=f\left(x,y\right)\\ y\left(x_0\right)&=y_0\end{aligned}$$

האם קיים פתרון גלובלי, כלומר לכל $-\infty < x < \infty$? אם לא, מה התחום המקסימלי עבורו קיים פתרון? כיצד פתרון זה יכול להישבר?

משפט 2.1 אם לכל $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ הפונקציה $f(x,y)$ מוגדרת, גזירה ברציפות וחסומה, אזי לבעית תנאי ההתחלה קיים פתרון גלובלי.

הוכחה: ממשפט הקיום והיחידות הראשון (במלבן) נובע שאם f גזירה ברציפות במלבן $(x_0 - a, x_0 + a) \times (y_0 - b, y_0 + b)$, אזי קיים פתרון יחיד בקטע $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$, כאשר $\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$, כאשר M הוא החסם של f. מתנאי המשפט נובע שניתן לחקת את a, b גדולים כרצוננו. על כן, המשפט הלוקאלי נכון עם α גדול כרצוננו. לכן קיים פתרון גלובלי, ופתרון זה חייב להיות יחיד. נשים לב שהשתמשנו בכך שאותה f חסומה גלובלית, אבל לא דרשנו כי f_y חסומה גלובלית. ■

דוגמא

$$y' = \sin\left(y^2\right)$$

אזי $f = \sin\left(y^2\right)$, $f_y = 2y\cos\left(y^2\right)$. יש קיום גובלי לפי המשפט למרות שהנגזרת f_y לא חסומה.

מה קורה אם f לא חסומה גלובלית?

$$\begin{aligned} y' &= y \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

יש פתרון גלובלי, $y = e^x$.

$$\begin{aligned} y' &= y^2 \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

אין קיום גלובלי, כי הפתרון הוא $\frac{1}{1-y}$.

ננסה למצוא פתרון גלובלי במצב זה, על יד מציאת פתרון במלבן ואז לקיחת קצה המלבן כתנאי ההתחלה החדש, והרחבת הפתרון. נשמור את הסימונים מהמשפט הלוקלי, ואז

$$\alpha_i = \min\left\{\frac{b_i}{M_i}, a_i\right\}$$

אבל f לא תלויה בערך x, ולכן $\alpha_i = \frac{b_i}{M_i}$. נחשב b_i שייתן α_i מקסימלי. נשים לב כי

$$M_i = \max_{|y-y_i| \le b_i} |f(y)| = \max_{|y-y_i| \le b_i} \left|y^2\right| = (y_i + b_i)^2$$

כלומר

$$\alpha_i = \max_{b_i > 0} \frac{b_i}{\left(y_i + b_i\right)^2}$$

מקסימום זה מתקבל כאשר $b_i = y_i$, וערכו $\alpha_i = \frac{1}{4y_i}$ (לבדוק בבית). לכן, כאשר $y \to \infty$, אורכי הקטעים α_i שואפים לאפס, ולכן יכול להיות שלא נמצא פתרון גלובלי.

בדוגמה הקודמת, נקבל שאורכי הקטעים הם תמיד לפחות $\frac{1}{2}$ בשיטה הזו, ואז כן יהיה קיום גלובלי.

כעת נתבונן בדוגמה

$$y' = \frac{1}{2y}$$
$$y\left(0\right) = 1$$

אז f מתפוצצת באפס. נפתור:

$$2yy' = 1$$
$$y^2 = x + c = x + 1$$
$$y = \sqrt{x+1}$$

הפתרון נשבר בנקודה -1. הפתרון לא מתפוצץ בנקודת השבירה, אלא יוצא מתחום ההגדרה של $f\left(x,y\right)$ שהוא

$$D = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \backslash \left\{0\right\}$$

האם יש עוד אפשרויות? לא!

משפט 2.2 תהי $f\left(x,y\right)$ גזירה ברציפות בתחום הפתוח $D \subseteq \mathbb{R}^2$. אזי לכל $\left(x_0, y_0 \in D\right)$, למשוואה $y' = f\left(x,y\right)$ קיים פתרון יחיד לוקאלי המקיים את תנאי ההתחלה $y\left(x_0\right) = y_0$. יהי $\left[x_0, x^*\right)$ הקטע המקסימלי בו פתרון זה קיים. אם $x^* < \infty$, אזי כאשר $x \to x^*$, או שהנקודות $\left(x, y\left(x\right)\right)$ שואפות לשפת התחום D, או שהערך $y\left(x\right)$ לא חסום.

הוכחה: נוכיח תחילם שקיים פתרון מקסימלי, כלומר קיים קטע מקסימלי בו קיים פתרון (שהוא יחיד).

נגדיר

$$S = \left\{y\left(x\right) \mid \text{y solves the system on interval } \left[x_0, x_1\right]\right\}$$

ממשפט קיום ויחידות לוקלי, S לא ריקה. נגדיר

$$x^* = \sup_{y \in S} \left\{x_1\right\} \leq \infty$$

לכל $x \in [x_0, x^*]$ הערך של $y(x)$ מזדהה עבור כל הפתרונות בתוך S שעבורם $x > x_1$.
לכן $y(x)$ מוגדר היטב והוא הפתרון היחיד של הבעיה בקטע $[x_0, x^*]$. אם $x^* = \infty$, סיימנו.
אם הוא סופי, $y(x)$ לא חסומה כאשר $x \to x^*$, אז גם סיימנו. לכן, נניח שהיא חסומה,
ונראה שמתקיים

$$(x, y(x)) \xrightarrow{x \to x^*} \partial D$$

נבחר סדרה $x_n \to x^*$. מכיוון שהסדרה $(x_n, y(x_n))$ חסומה, יש לה תת סדרה מתכנסת
לנקודת הצטברות (x^*, y^*). נותר להראות כי (x^*, y^*) נמצאת על השפה. נוכיח בדרך
השלילה.
נניח כי (x^*, y^*) נקודה פנימית של D. לכן, קיים $\varepsilon > 0$ כך שהריבוע $(x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon) \times$
$(y^* - \varepsilon, y^* + \varepsilon) = R$ כולו בתוך D. נסמן

$$M = \sup_R |f|$$

כיוון שהפונקציה f רציפה, אזי $M < \infty$. נגדיר $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{4M}\right\}$. נגדיר מלבן נוסף:

$$G = (x^* - \delta, x^* + \delta) \times \left(y^* - \frac{\varepsilon}{2}, y^* + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

היות ויש שאיפה $(x_{n_k}, y_{n_k}) \to (x^*, y^*)$, קיים n_0 המקיים $(x_{n_0}, y_{n_0}) \in G$. נגדיר
סביבה את המלבן:

$$\tilde{G} = (x_{n_0} - \delta, x_{n_0} + \delta) \times \left(y_{n_0} - \frac{\varepsilon}{2}, y_{n_0} + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

מלבן זה חייב עדיין להיות בתוך R, ולכן

$$\max_{\tilde{G}} |f| \le M$$

ממשפט הקיום והיחידות הלוקלי, עבור

$$y' = f(x, y)$$
$$y(x_{n_0}) = y_{n_0}$$

קיים פתרון יחיד בקטע $(x_{n_0} - \alpha, x_{n_0} + \alpha)$ כאשר

$$\alpha = \min\left\{\delta, \frac{\varepsilon}{2M}\right\} = \delta$$

לכן בפרט אפשר להמשיך את הפתרון אחרי x^*, בסתירה. ■

3 שיטות גרפיות

3.1 שדה כיוונים

נתבונן במשוואה $y' = f\left(x, y\right)$, ונניח כי $y\left(x\right)$ פתרון. שיפוע המשיק בנקודה מסויימת הוא $y' = f\left(x, y\right)$. לכן כיוון המשיק הוא $\left(1, f\right)$.

הגדרה 3.1 שדה כיוונים הוא פונקציה המתאימה לכל נקודה $\left(x, y\right)$ כיוון.

רעיון נשרטט את שדה הכיוונים שמתאים לנקודה $\left(x, y\right)$ את הוקטור $\left(1, f\right)$ או את הווקטור המנורמל $\frac{(1,f)}{\sqrt{1+f^2}}$ (במטלאב: quiver).