משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

ⓒ ארזים

21 באפריל 2017

1 רגע של דיוק

נתונה משוואה

$$M\left(x,y\right)\mathrm{d}x+N\left(x,y\right)\mathrm{d}y=0$$

היא נקראת מדוייקת אם

$$M_{y}=N_{x}$$

לפעמים יש גורם אינטגרציה $\mu\left(x,y\right)$, כלומר אם נכפול בו נקבל משוואה מדוייקת.
למדנו למצוא פתרון למשוואה מדוייקת מהצורה

$$F\left(x,y\right)=c$$

עבור $c\in\mathbb{R}$. במצב זה F אינה פתרון - היא פונקציה של שני משתנים. פתרון הוא קשר בין x,y, כלומר המשוואה

$$F\left(x,y\right)=c$$

היא פתרון.

2 קיום ויחידות

משפט 2.1 (משפט פיקארד לקיום ויחידות) נתבונן במשוואה

$$y'=f\left(x,y\right)$$
$$y\left(x_{0}\right)=y_{0}$$

במלבן

$$R=\left[x_{0}-a,x_{0}+a\right]\times\left[y_{0}-b,y_{0}+b\right]$$

כאשר $a, b > 0$. נניח כי f ליפשיץ על המלבן. אזי יש קיום ויחידות לוקאלית של הפתרון. נסמן

$$M = \max_{(x,y)\in R} |f(x,y)|$$

ואז נגדיר

$$\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$$

ונקבל קיום ויחידות של הפתרון בקטע $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.

הערה 2.2 המשפט <u>אינו</u> אם ורק אם (תנאי מספיק, לא הכרחי).

2.1 קיום ויחידות בקטע

1. קיום - יש $y(x)$ כך שלכל $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ מתקיים $y'(x) = f(x,y)$.
2. יחידות - אם יש עוד פתרון z, אזי לכל x בקטע מתקיים $y(x) = z(x)$.

דוגמא

$$\begin{aligned} y'(x) &= x^2 + e^{-y^2} \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

נרצה להראות שי פתרון יחיד עבור $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $|y| \leq 1$.

פתרון נסמן $f(x,y) = x^2 + e^{-y^2}$, וזו פונקציה ליפשיץ - גזירה ברציפות, ובפרט ליפשיץ. כעת בחר

$$\begin{aligned} R &= \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times [-1, 1] \\ M &= \max_R \left|x^2 + e^{-y^2}\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

לכן

$$\alpha = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{4}{5}\right\} = \frac{1}{2}$$

לפי פיקארד יש קיום ויחידות.

2.2 איטרציות פיקארד

חוץ מכלים אנליטיים, זוהי שיטה נומרית שפותרת כל משוואה דיפרנציאלית רגילה מסדר ראשון. נתון

$$y' = f(x,y)$$
$$y(x_0) = y_0$$

אז איטרציות פיקרד הן:

$$y_{n+1} = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n)\, \mathrm{d}t$$

הוכחנו בשיעור שאלה מתכנסות לפתרון המשוואה אם מתקיימים תנאי משפט פיקארד.

דוגמא נפתור את

$$y' = y$$
$$y(0) = 1$$

על ידי איטרציות פיקרד:

$$y_0 = 1$$
$$y_1 = 1 + \int_0^x 1\, \mathrm{d}t = 1 + x$$
$$y_2 = 1 + \int_0^x 1 + t\, \mathrm{d}t = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

וכן הלאה. נוכיח באינדוקציה כי

$$y_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}$$

(איטרציות פיקארד לא תמיד מתכנסות לטור טיילור!) נניח עבור n, ונראה את הצעד:

$$y_{n+1} = 1 + \int_0^x \sum_{j=0}^{n} \frac{t^j}{j!}\, \mathrm{d}t =$$
$$= 1 + \sum_{j=0}^{n} \frac{x^{j+1}}{(j+1)\, j!} =$$
$$= \sum_{j=0}^{n+1} \frac{x^j}{j!}$$

3 אי שוויונות דיפרנציאליים, רציות בתנאי התחלה או במשוואה

אי שוויונות דיפרנציאליים הם מהצורה

$$y' \leq f(x,y)$$

רציפות הכוונה שאם

$$y' = f(x,y)$$
$$z' = g(x,y)$$

וכן

$$|f(x,y) - g(x,y)| < \varepsilon$$

מה ניתן לומר על $|y(x) - z(x)|$?

משפט 3.1 תהי $w \in C^1(\mathbb{R}^2)$. נניח כי

$$\dot{u} = w(t,u)$$

על $[a,b]$, בעוד

$$\dot{v} \leq w(t,v)$$

על $[a,b]$. נניח גם כי

$$v(a) \leq u(a)$$

אזי לכל $t \in [a,b]$, מתקיים

$$v(t) \leq u(t)$$

הוכחה: נגדיר u_n המקיימות

$$\dot{u}_n = w(t,u_n) + \frac{1}{n}$$

וכן $u_n(a) = u(a)$ לכל $a \in \mathbb{N}$. ממשפט על רציפות במשוואה $y' = f(x,y)$ נובע שאם נסמן

$$w_n(t,y) = w(t,y) + \frac{1}{n}$$

אזי

$$|w-w_n| \leq \frac{1}{n}$$

בכל מקום, ומקבלים $u \to u_n$. בפרט, החל מאיזשהו N גדול מספיק, u_n מוגדר בכל $[a,b]$. נניח בשלילה שיש $t_1 \in [a,b]$ עם $u(t_1) < v(t_1)$. כיוון שמתקיים $u_n \to u$ במידה שווה, נבחר n גדול מספיק עבורו

$$u_n(t_1) < v(t_1)$$

לכן, יש $a \leq t_2 < t_1$ כך שבקטע $[t_1,t_2]$ מתקיים $u_n(t) < v(t)$, אבל $u_n(t_2) = v(t_2)$. נובע כי

$$w(t,v(t_2)) \geq \dot{v}(t_2) \geq \dot{u}_n(t_2) = w(t_2,u_n(t_2)) + \frac{1}{n} =$$
$$= w(t_2,v(t_2)) + \frac{1}{n} > w(t_2,v(t_2))$$

בסתירה. ■