משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

© ארזים

11 במאי 2017

1 משוואות לינאריות במקדמים קבועים לא הומוגניות

משוואה מסדר n באופן כללי היא אופרטור דיפרנציאלי לינארי מסדר n. ראינו שעבור המשוואה ההומוגנית $Ly=0$ יש מרחב ווקטורי של פתרונות ממימד n. במשוואות לא הומוגניות, $Ly=f\neq0$, הפתרונות כבר לא מרחב ווקטורי, אלא אפיני: הם מהצורה $y=y_p+y_h$, כאשר y_p פתרון פרטי, y_h פתרון של המשוואה ההומוגנית המתאימה (הזזה של המרחב הווקטורי בווקטור מסויים).

דוגמא

$$y''-y=xe^{2x}+x^2e^{-x}+1$$

המקדמים כאן קבועים, ונשתמש בשיטת המקדמים הלא ידועים לפתרון משוואה לינארית לא הומוגנית מסדר 2. ראשית נפתור את הבעיה ההומוגנית:

$$y''-y=0$$

נחפש שני פתרונות בלתי תלויים לינארית. נתבונן בפולינום האופייני:

$$\begin{aligned}r^2-1&=0\\ r&=\pm1\end{aligned}$$

ובסך הכל נקבל שהפתרון הכללי הוא

$$y_h=c_1e^x+c_2e^{-x}$$

כעת, נשים לב שאגף שמאל של המשוואה המקורית הוא סכום של שלוש פונקציות. מספיק לנו למצוא פתרון פרטי לכל אחת מהן, כי אז סכום הפתרונות יהיה פתרון למשוואה שלנו.

נזכר בשיטת המקדמים הלא ידועים. אם $g(x)$, אגף ימין, מהצורה $Q_k(x)e^{ax}$, כאשר $a\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{N}$, Q_k פולינום ממעלה k, מנחשים פתרון מהצורה

$$y_p=\left(\sum_{j=0}^{k}\alpha_jx^j\right)x^se^{ax}$$

כאשר s הריבוי של a כשורש של הפולינום האופייני.
ראשיצ, נפתור עבור $g_1(x) = xe^{2x}$. 2 אינו שורש של הפולינום האופייני, לכן הניחוש הוא

$$y_p = (Ax + B)\, e^{2x}$$

נציב ונחשב:

$$4e^{2x}(Ax + B) + 4e^{2x}A - e^{2x}(Ax + B) = xe^{2x}$$

על ידי השוואת מקדמים נקבל

$$\begin{aligned} 4A - A &= 1 \\ 4A + 3B &= 0 \end{aligned}$$

נקבל

$$A = \frac{1}{3}, B = -\frac{4}{9}$$

ונקבל

$$y_{p,1}(x) = \left(\frac{1}{3}x - \frac{4}{9}\right) e^{2x}$$

נעבור לפתור עבור $y_{p_2}(x) = x^2 e^{-x}$, אבל -1 שורש מריבוי 1 של הפולינום האופייני. לכן מנחשים

$$y_{p_2}(x) = \left(Ax^2 + Bx + C\right) e^{-x} x^2$$

אפשר להמשיך ולחשב.

1.1 תנאי התחלה ושיטת המקדמים הלא ידועים

ניקח את המשוואה

$$\begin{aligned} y'' - y' - 2y &= e^x \\ y(0) &= -2 \\ y'(0) &= 5 \end{aligned}$$

במקרה ההומוגני, הפולינום האופייני הוא $(r-2)(r+1)$, כלומר הפתרון ההומוגני הכללי הוא

$$y_h(x) = Ae^{2x} + Be^{-x}$$

עבור הבעיה הפרטית, נחפש פתרון פרטי $y_p(x) = ce^x$. נציב ונקבל $c = -\frac{1}{2}$. לכן הפתרון הכללי הוא

$$y = y_p + y_h = Ae^{2x} + Be^{-x} - \frac{1}{2}e^x$$

נציב את תנאי ההתחלה:

$$y(0) = -2 = A + B - \frac{1}{2}$$
$$y'(0) = 5 = 2A - B - \frac{1}{2}$$

נפתור ונקבל

$$A = \frac{4}{3}, B = -\frac{17}{6}$$

1.2 משוואת אוילר

המשוואה היא מהצורה

$$\sum_{j=0}^{n} a_j x^j y^{(j)} = g(x)$$

משוואה זו לינארית, אבל לא במקדמים קבועים. (נשים לב שלא מובטח לנו כאן קיום ויחידות בנקודה 0 - בצורה הקנונית יש חילוק הפונקציות בחזקה של x). יש שתי שיטות לפתרון: לחפש פתרון מהצורה x^r, או להציב $x = e^t$. ראשית נציב x^r:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j x^j (x^r)^{(j)} = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j x^{r-j} r(r-1)\cdots(r-j+1) = x^r \sum_{j=0}^{n} b_j(r) = 0$$

וקיבלנו פולינום אופייני חדש במשתנה r.
בדרך השנייה, נרצה לקשר בין $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ לבין $\dot{y} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$. בעזרת כלל השרשרת נקבל

$$y' = \frac{\dot{y}}{x}$$
$$y'' = \frac{1}{x^2}(\ddot{y} - \dot{y})$$

ואפשר להמשיך. מה שמקבלים זו משוואה במקדמים קבועים. לדוגמא:

$$x^3y''' + xy' - y = \ln^3(x)$$
$$\dddot{y} - 3\ddot{y} + 3\dot{y} - y = t^3$$

ואת זה יודעים לפתור.
במקרה ההומוגני: הפולינום האופייני הוא $r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = (r-1)^3$, לכן הפתרונות הבלתי תלויים הם e^t, te^t, t^2e^t. במקרה הלא הומוגנים, ממשיכים עם שיטת המקדמים הלא ידועים (נשאיר הביתה).
נחזור לרגע למקדמים קבועים. ראינו שעבור פולינום אופייני $(r-1)^2$, הפתרונות המתאימים הם e^x, xe^x. נוכיח זאת בדרך שונה מהשיעור.

$$y'' - 2y' + y = 0$$

מניתוח פולינום אופייני מקבלים $y = e^x$ פתרון. נמצא עוד פתרון לפי הורדת סדר. נציב $y_2(x) = e^x v(x)$, ונקבל

$$v'(x) = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(t)\,\mathrm{d}t} = e^{-2x}e^{2x} = 1$$

על כן נקבל $v(x) = x$, כלומר $y_2(x) = xe^x$. באופן כללי, נקבל כי $v^{(k)}(x) = 0$ כאשר k ריבוי השורש r.