הסתברות למתמטיקאים

ארזים ©

28 ביוני 2017

1 משפט הגבול המרכזי

נחזור על סוף ההוכחה מהשיעור שעבר. ניזכר בכמה למות מחדו"א:

למה 1.1 לכל x מתקיים $1+x \leq e^x$, ולכל $|x| \leq \frac{1}{2}$ מתקיים $1+x \geq e^{x-2x^2}$. מכאן, נסיק כי $1+x = e^{x-O\left(x^2\right)}$ כאשר $x \to 0$ (זה למעשה חלש יותר מהלמה).

ניזכר במה שדיברנו עליו בשיעור שעבר. יהי X משתנה מקרי בעל תוחלת 0 ושונות 1. אזי

$$\varphi_X\left(\theta\right) = \mathbb{E}\left(e^{i\theta X}\right) = 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + o\left(\theta^2\right)$$

כאשר $\theta \to 0$. נבהיר כעת את סוף הוכחת משפט הגבול המרכזי. תהי $\left(X_n\right)$ סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות בעלי תוחלת 0 ושונות 1. אזי

$$\overline{S_n} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0,1\right)$$

קיבענו $\theta \in \mathbb{R}$ וכתבנו

$$\varphi_{\overline{S_n}}\left(\theta\right) = \mathbb{E}\left(e^{i\theta\overline{S_n}}\right) = \varphi_{X_1}\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\theta^2}{n} + o\left(\frac{\theta^2}{n}\right)\right)^n$$

נפעיל את המסקנה עבור $x = -\frac{1}{2}\frac{\theta^2}{n} + o\left(\frac{\theta^2}{n}\right)$ ונקבל

$$\begin{aligned}\varphi_{\overline{S_n}}\left(\theta\right) &= \left(e^{-\frac{1}{2}\frac{\theta^2}{n} + o\left(\frac{\theta^2}{n}\right) + O\left(\frac{\theta^4}{n^2}\right)}\right)^n = \left(e^{-\frac{1}{2}\frac{\theta^2}{n} + o\left(\frac{\theta^2}{n}\right)}\right)^n = \\ &= e^{-\frac{1}{2}\theta^2 + o\left(\theta^2\right)} \xrightarrow{n\to\infty} e^{-\frac{1}{2}\theta^2}\end{aligned}$$

והמשפט נובע כעת ממשפט ההתכנסות של לוי.

דוגמא כמות המעגלים בתמורה אחידה על n איברים. ניקח $\pi \in S_n$ אחידה, ונסמן $C\left(\pi\right)$ את כמות המעגלים בתוך π. ראינו בקורס כי $C\left(\pi\right) = \sum X_j$, כאשר $X_j \sim \mathrm{Ber}\left(\frac{1}{j}\right)$. נובע $\mathbb{E}\left(C\left(\pi\right)\right) = \log n + O\left(1\right)$, $\mathrm{Var}\left(C\left(\pi\right)\right) = \log n + O\left(1\right)$. נוכיח כעת שמתקיים

$$\overline{C} := \frac{C\left(\pi\right) - \log n}{\sqrt{\log n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0,1\right)$$

הוכחה: נקבע $\theta\in\mathbb{R}$ ונעריך את $\varphi_{\overline{C}}\left(\theta\right)$:

$$\begin{aligned}\varphi_{\overline{C}}\left(\theta\right) &= \mathbb{E}\left(e^{i\frac{C(\pi)-\log n}{\sqrt{\log n}}\theta}\right)=\\ &= e^{-i\theta\sqrt{\log n}}\mathbb{E}\left(e^{i\frac{\theta}{\sqrt{\log n}}(X_1+\cdots+X_n)}\right)=\\ &= e^{-i\theta\sqrt{\log n}}\prod_{j=1}^{n}\mathbb{E}\left(e^{i\frac{\theta}{\sqrt{\log n}}X_j}\right)=\\ &= e^{-i\theta\sqrt{\log n}}\prod_{j=1}^{n}\left(\left(1-\frac{1}{j}\right)1+\frac{1}{j}e^{i\frac{\theta}{\sqrt{\log n}}}\right)\end{aligned}$$

ונרצה לדעת אם זה מתכנס אל $e^{-\frac{1}{2}\theta^2}$. נבחין כי

$$\begin{aligned}1-\frac{1}{j}+\frac{1}{j}e^{i\frac{\theta}{\sqrt{\log n}}} &= 1+\frac{1}{j}\left(e^{i\frac{\theta}{\sqrt{\log n}}}-1\right)=\\ &= 1+\frac{1}{j}\left(\frac{i\theta}{\sqrt{\log n}}-\frac{\theta^2}{2\log n}+o\left(\frac{\theta^2}{\log n}\right)\right)=\\ &= e^{\frac{1}{j}\left(\frac{i\theta}{\sqrt{\log n}}-\frac{\theta^2}{2\log n}+o\left(\frac{1}{\log n}\right)\right)+O\left(\frac{1}{j^2\log n}\right)}\end{aligned}$$

נציב זאת בחזרה ונקבל

$$\varphi_{\overline{C}}\left(\theta\right)=e^{-i\theta\sqrt{\log n}+\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\left(\frac{i\theta}{\sqrt{\log n}}-\frac{\theta^2}{\log n}+o\left(\frac{1}{\log n}\right)+O\left(\frac{1}{j^2\log n}\right)\right)}$$

נבחין כי

$$\begin{aligned}\left(i\frac{\theta}{\sqrt{\log n}}-\frac{\theta^2}{2\log n}\right)\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} &= \left(i\frac{\theta}{\sqrt{\log n}}-\frac{\theta^2}{2\log n}\right)\left(\log n+O\left(1\right)\right)=\\ &= i\theta\sqrt{\log n}-\frac{\theta^2}{2}+O\left(\frac{1}{\sqrt{\log n}}\right)\end{aligned}$$

ולכן

$$\varphi_{\overline{C}}\left(\theta\right)=e^{-\frac{\theta^2}{2}+\sum\limits_{j=1}^{n}o\left(\frac{1}{j\log n}\right)+O\left(\frac{1}{j^2\log n}\right)}=e^{-\frac{\theta^2}{2}+o(1)}\xrightarrow{n\to\infty}e^{-\frac{\theta^2}{2}}$$

■

1.1 חובות ישנים

משפט 1.2 (משפט ההיפוך של לוי) תהי μ מידת הסתברות על $\mathbb{R}$ ותהי $\varphi\left(\theta\right)=\int e^{i\theta x}\,\mathrm{d}\mu\left(x\right)$ הפונקציה האופיינית שלה. אזי לכל $a<b$ מתקיים

$$\frac{1}{2}\mu\left(\{a\}\right)+\mu\left((a,b)\right)+\frac{1}{2}\mu\left(\{b\}\right)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-i\theta a}-e^{-i\theta b}}{i\theta}\varphi\left(\theta\right)\,\mathrm{d}\theta$$

יתר על כן, אם $\int |\varphi(\theta)| \,\mathrm{d}\theta < \infty$ אזי μ רציפה בהחלט ביחס למידת לבג, ואם נסמן את הצפיפות שלה f, אזי f רציפה וכן

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-ix\theta} \varphi(\theta) \,\mathrm{d}\theta$$

אפשר מכאן לשחזר את μ, כי למשל לכל $a < b$ יתקיים

$$\mu([a,b]) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2}\mu(\{a-\varepsilon\}) + \mu((a-\varepsilon, b+\varepsilon)) + \frac{1}{2}\mu(\{b-\varepsilon\})$$

הוכחה: נתחיל בנוסחה הראשונה. נבחין ראשית שלכל $u, v \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\left|e^{iv} - e^{iu}\right| \le |v-u|$$

נציב את הגדרת $\varphi(\theta)$ בנוסחה וננסה להשתמש במשפט פוביני.

$$\int_{-T}^{T} \frac{e^{-i\theta a} - e^{-i\theta b}}{i\theta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x} \,\mathrm{d}\mu(x) \,\mathrm{d}\theta = \int_{-T}^{T} \int \frac{e^{i\theta(x-a)} - e^{i\theta(x-b)}}{i\theta} \,\mathrm{d}\mu(x) \,\mathrm{d}\theta$$

נבדוק אינטגרביליות:

$$\int_{-T}^{T} \int \frac{\left|e^{i\theta(x-a)} - e^{i\theta(x-b)}\right|}{|\theta|} \,\mathrm{d}\mu(x) \,\mathrm{d}\theta \le \int_{-T}^{T} \int b - a \,\mathrm{d}\mu(x) \,\mathrm{d}\theta = 2T(b-a) < \infty$$

כאשר באמצע השתמשנו באי השוויון שתיארנו קודם. לכן, נפעיל את פוביני, ונקבל שהנוסחה ממשיכה ונהיית

$$\int_{-T}^{T} \int \frac{e^{i\theta(x-a)} - e^{i\theta(x-b)}}{i\theta} \,\mathrm{d}\mu(x) \,\mathrm{d}\theta = \int \int_{-T}^{T} \frac{e^{i\theta(x-a)} - e^{i\theta(x-b)}}{i\theta} \,\mathrm{d}\theta \mathrm{d}\mu(x)$$

נתמקד באינטגרל הפנימי.

$$\int_{-T}^{T} \frac{\cos(\theta(x-a)) + i\sin(\theta(x-a)) - \cos(\theta(x-b)) - i\sin(\theta(x-b))}{i\theta} \,\mathrm{d}\theta$$

נוכל לבטל את הגורמים מהצורה $\frac{\cos(\theta(x-a))}{\theta}, \frac{\cos(\theta(x-b))}{\theta}$, שהם אי זוגיים, ולכן זה ממשיך ונהיה

$$\int_{-T}^{T} \frac{\sin(\theta(x-a))}{\theta} - \int_{-T}^{T} \frac{\sin(\theta(x-b))}{\theta} \,\mathrm{d}\theta$$

נגדיר כעת

$$S(U)=\int\limits_0^U \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

עבור $U>0$. כעת נוכל לכתוב את האינטגרלים הקודמים בעזרת S. אכן,

$$\int\limits_{-T}^{T}\frac{\sin(\theta(x-a))}{\theta}\,\mathrm{d}\theta=2\int\limits_0^T\frac{\sin(\theta(x-a))}{\theta}\,\mathrm{d}\theta=[\theta(x-a)=t]$$

$$=\frac{2}{x-a}\int\limits_0^{T(x-a)}\frac{\sin(t)}{t}(x-a)\,\mathrm{d}t=2\int\limits_0^{T(x-a)}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

אם $x=a$ תהיה כאן בעיה אבל נקבל באינטגרל המקורי 0. אם $x<a$ נצטרך להפוך את הסימן: האינטגרל שלנו הוא

$$\int\limits_{-T}^{T}\frac{\sin(\theta(x-a))}{\theta}\,\mathrm{d}\theta=2\mathrm{sign}(x-a)\,S(T|x-a|)$$

בסך הכל האינטגרל שלנו (החיצוני) הוא

$$2\int(\mathrm{sign}(x-a)\,S(T|x-a|)-\mathrm{sign}(x-b)\,S(T|x-b|))\,\mathrm{d}\mu(x)$$

נעיר כעת, כתרגיל, שמתקיים

$$\lim_{U\to\infty}S(U)=\frac{\pi}{2}$$

אולי נחזור לזה מאוחר יותר (רמז - אינטגרציה במרוכבים). אם כן,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-T}^{T}\frac{e^{-i\theta a}-e^{-i\theta b}}{i\theta}\varphi(\theta)\,\mathrm{d}\theta=\cdots=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{\pi}\int(\mathrm{sign}(x-a)\,S(T|x-a|)-\mathrm{sign}(x-b)\,S(T|x-b|))\,\mathrm{d}\mu(x)$$

בגלל שהאינטגרל של $S(U)$ מתכנס בגבול, נוכל להפעיל התכנסות חסומה, ולחליף סדר של גבול ואינטגרל. נמשיך:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{\pi}\int\left(\operatorname{sign}(x-a)\,S(T\left|x-a\right|)-\operatorname{sign}(x-b)\,S(T\left|x-b\right|)\right)\,\mathrm{d}\mu(x)=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int\lim_{T\to\infty}\left(\operatorname{sign}(x-a)\,S(T\left|x-a\right|)-\operatorname{sign}(x-b)\,S(T\left|x-b\right|)\right)\,\mathrm{d}\mu(x)=$$
$$=\frac{1}{2}\int\operatorname{sign}(x-a)-\operatorname{sign}(x-b)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

יש כעת שלושה מקרים:

1. $x\notin[a,b]$.
2. $x\in\{a,b\}$.
3. $x\in(a,b)$.

במקרה הראשון, הסימנים יהיו שווים, וההפרש יהיה 0. במקרה השני, ההפרש הוא 1. במקרה 3, ההפרש יהיה 2. בסך הכל זה שווה

$$\frac{1}{2}\mu(\{a\})+\mu((a,b))+\frac{1}{2}\mu(\{b\})$$

נעבור להראות את הנוסחה השנייה. נניח כי

$$\int\left|\varphi(\theta)\right|\,\mathrm{d}\theta<\infty$$

אזי

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-i\theta a}-e^{-i\theta b}}{i\theta}\varphi(\theta)\,\mathrm{d}\theta=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int\frac{e^{-i\theta a}-e^{-i\theta b}}{i\theta}\varphi(\theta)\,\mathbb{1}_{\theta\in[-T,T]}\,\mathrm{d}\theta$$

מהתכנסות נשלטת (את הגורם הראשון חסמנו קודם, השני הנחנו שחסון והשלישי אינדיקטור) נחליף גבול ואינטגרל:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\theta a}-e^{-i\theta b}}{i\theta}\varphi(\theta)\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\mu(a)+\mu((a,b))+\frac{1}{2}\mu(b)$$

נוכיח שהאינטגרל מגדיר פונקציה רציפה של a,b, ולכן לא יכולים להיות אטומים של μ. הרציפות הזו נובעת מהתכנסות נשלטת. נראה כי μ רציפה בהחלט:

$$\frac{\mu([a,b])}{b-a}=\frac{1}{2\pi}\int\frac{e^{-i\theta a}-e^{-i\theta b}}{i\theta(b-a)}\varphi(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

מהתכנסות נשלטת, נוכל לקחת גבול $b \to a$ בתוך האינטגרל, ואז

$$\lim_{b\to a} \frac{\mu\left([a,b]\right)}{b-a} = \frac{1}{2\pi}\int e^{-ia\theta}\varphi\left(\theta\right)\,\mathrm{d}\theta =: f\left(a\right)$$

נותר לבדוק שזו אכן הצפיפות. f רציפה, מהתכנסות נשלטת. כדי לראות שהיא צפיפות של μ נבחין כי

$$\int_a^b f\left(x\right)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{1}{2\pi}\int e^{-ix\theta}\varphi\left(\theta\right)\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int\int_a^b e^{-ix\theta}\,\mathrm{d}x\cdot\varphi\left(\theta\right)\,\mathrm{d}\theta =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int \frac{e^{-i\theta a}-e^{-i\theta b}}{i\theta}\varphi\left(\theta\right)\,\mathrm{d}\theta = \mu\left([a,b]\right)$$

ולכן סיימנו. ■

נותר לנו עוד חוב אחד:

משפט 1.3 (משפט ההתכנסות של לוי) תהי (μ_n) סדרת מידות הסתברות על הישר, עם פונקציות אופייניות $\varphi_{\mu_n}\left(\theta\right)$. נניח כי $\varphi_{\mu_n}\left(\theta\right) \to g\left(\theta\right)$ לכל $\theta\in\mathbb{R}$. נניח עוד כי g רציפה בנקודה $\theta=0$. אזי קיימת מידת הסתברות μ על הישר עם $\mu_n \xrightarrow{d} \mu$ וכן $g\left(\theta\right) = \varphi_\mu\left(\theta\right)$.

הוכחה: ניזכר בהגדרת של הדיקות של סדרת מידות - לכל $\varepsilon > 0$ קיים $K < \infty$ כך שמתקיים

$$\mu_n\left([-K,K]\right) \geq 1-\varepsilon$$

לכל n. במקרה שזה קורה, יש מידת הסתברות μ ותת סדרה μ_{n_k} עם $\mu_{n_k} \xrightarrow{d} \mu$.

ראשית, נניח כי μ_n (מהמשפט) הדוקה. ניקח תת סדרה $\mu_{n_k} \xrightarrow{d} \mu$ עבור μ מידת הסתברות. מההגדרה נקבל

$$\varphi_{\mu_{n_k}}\left(\theta\right) = \int e^{ix\theta}\,\mathrm{d}\mu_{n_k}\left(x\right) \to \int e^{ix\theta}\,\mathrm{d}\mu\left(x\right) = \varphi_\mu\left(\theta\right)$$

שכן $e^{ix\theta}$ רציפה וחסומה. מכאן נקבל $g=\varphi_\mu$. נניח בשלילה כי $\mu_n \stackrel{d}{\not\to} \mu$, כלומר קיימת פונקציה רציפה וחסומה $h\left(x\right)$ עם

$$\int h\left(x\right)\,\mathrm{d}\mu_n\left(x\right) \not\to \int h\left(x\right)\,\mathrm{d}\mu\left(x\right)$$

לכן, קיימת תת סדרה (m_k) עבורה

$$\lim_{k\to\infty}\int h\left(x\right)\,\mathrm{d}\mu_{m_k}\left(x\right)$$

קיים ושונה מאשר $\int h\left(x\right)\,\mathrm{d}\mu\left(x\right)$. מהדיקות יש תת סדרה $\mu_{n_{k_l}} \to \nu$ ולכן

$$\lim_{k\to\infty}\int h\left(x\right)\,\mathrm{d}\mu_{n_{k_l}}\left(x\right)=\int h\left(x\right)\,\mathrm{d}\nu\left(x\right)$$

ובפרט $\nu \neq \mu$.אבל כמו קודם, $g=\varphi_\nu$, וראינו כבר $g=\varphi_\mu$, ולכן $\varphi_\mu=\varphi_\nu$, וממשפט ההיפוך של לוי נקבל $\mu=\nu$, בסתירה.

כעת נותר לנו להראות כי μ_n הדוקה - ולשם כך נצטרך את הנתון כי g רציפה בנקודה $\theta=0$. נבחין כי

$$\begin{aligned}g\left(0\right)=1&=\lim_{n\to\infty}\varphi_{\mu_n}\left(0\right)\\g\left(\theta\right)&\leq 1\end{aligned}$$

נקבע $\varepsilon>0$. אזי קיים $\delta>0$ כך שאם $\left|\theta\right|\leq\delta$ אזי $\left|g\left(\theta\right)-1\right|\leq\frac{\varepsilon}{4}$. נבחין גם כי

$$\varphi_{\mu_n}\left(\theta\right)+\varphi_{\mu_n}\left(-\theta\right)=2\int\cos\left(x\theta\right)\,\mathrm{d}\mu_n\left(x\right)\in\mathbb{R}$$

לכן

$$\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}2-g\left(\theta\right)-g\left(-\theta\right)\,\mathrm{d}\theta\leq\frac{\varepsilon}{2}$$

מהתכנסות חסומה, קיים N_0 כך שלכל $n>N_0$ מתקיים

$$\begin{aligned}\varepsilon&\geq\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}2-\varphi_{\mu_n}\left(\theta\right)-\varphi_{\mu_n}\left(-\theta\right)\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}2-\int e^{i\theta x}+e^{-i\theta x}\,\mathrm{d}\mu_n\left(x\right)\,\mathrm{d}\theta=\\&=\frac{1}{2\delta}\int\int_{-\delta}^{\delta}\left(2-2\cos\left(\theta x\right)\right)\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\mu_n\left(x\right)=\frac{1}{2\delta}\int 4\delta-\frac{4}{x}\sin\left(x\delta\right)\,\mathrm{d}\mu_n\left(x\right)=\\&=2\int 1-\frac{\sin\left(x\delta\right)}{x\delta}\,\mathrm{d}\mu_n\left(x\right)\geq 2\int 1-\frac{1}{\left|x\right|\delta}\,\mathrm{d}\mu_n\left(x\right)\geq\mu_n\left(\left\{x\mid\left|x\right|\geq\frac{2}{\delta}\right\}\right)\end{aligned}$$

וזאת לכל n. לכן μ_n אכן הדוקה. ■