# הסתברות למתמטיקאים

ⓒ ארזים

17 במאי 2017

## 1 משפט התכנסות המרטינגל

**משפט 1.1** (משפט התכנסות המרטינגל) יהי $X$ על־מרטינגל חסום בנורמת $L^1$, משמע

$$\sup_{n\geq 0}\mathbb{E}\left|X_n\right|<\infty$$

אזי $X$ מתכנס כמעט תמיד, כלומר

$$\mathbb{P}\left(\exists\lim_{n\to\infty}X_n<\infty\right)=1$$

בנוסף, הגבול אינטגרבילי, כלומר אם נגדיר

$$Y=\limsup_{n\to\infty}X_n$$

אזי $\mathbb{E}\left|Y\right|<\infty$.

**הוכחה:** רעיון: יהיו $a<b$ ממשיים. נדום במשתנה $U_N\left[a,b\right]$ - כמות הפעמים עד זמן $N$ שבהם $X$ חצה מלהיות קטן מאשר $a$ להיות גדול מאשר $b$. כלומר, $U_N\left[a,b\right]$ הוא המקסימום על פני $k$ כך שקיימים $0\leq s_1<t_1\leq s_2<t_2\leq\cdots\leq s_k<t_k$ שבהם $X_{s_i}<a$, $X_{t_j}>b$. נוכיח כי $\lim U_N\left[a,b\right]$ סופי כמעט תמיד.

נגדיר $Y=C\cdot X$, כאשר $C$ הוא תהליך "קנה כשאתה קטן מאשר $a$ ומכור כשאתה גדול מאשר $a$". פורמלית:

$$\begin{aligned}C_1&=\mathbb{1}_{X_0<a}\\C_n&=\mathbb{1}_{C_{n-1}=1}\cdot\mathbb{1}_{X_{n-1}\leq b}+\mathbb{1}_{C_{n-1}=0}\cdot\mathbb{1}_{X_{n-1}<a}\end{aligned}$$

זהו תהליך צפוי וחסום. נובע כי $Y$ על מרטינגל, ממשפט שראינו. בפרט,

$$\mathbb{E}Y_n\leq\mathbb{E}Y_0=0$$

לכל $n$. אבל, מההגדרה

$$Y_n\geq\left(b-a\right)U_n\left[a,b\right]-\left(X_n-a\right)^-$$

כלומר, הרווחנו לפחות $(b-a)$ כפול כמות החציות, והפסדתי לכל היותר את ההפרש בין $X_n$ לבין $a$. כעת, מתקיים

$$0 \geq \mathbb{E}Y_n \geq (b-a)\,\mathbb{E}U_n\,[a,b] - \mathbb{E}\left((X_n-a)^-\right)$$

נסדר זאת ונקבל

$$(b-a)\,\mathbb{E}U_n\,[b-a] \leq \mathbb{E}\left((X_n-a)^-\right) \leq \mathbb{E}\left(|X_n|+|a|\right) \leq \sup_n \mathbb{E}\,|X_n|+|a| < \infty$$

ממשפט ההתכנסות המונוטונית נקבל

$$(b-a)\,\mathbb{E}\left(\lim_{n\to\infty} U_n\,[a,b]\right) < \infty$$

ומכאן שהגבול $\lim U_n\,[a,b]$ סופי כמעט תמיד.
נסיק כעת את משפט התכנסות המרטינגל. ממה שהוכחנו,

$$\mathbb{P}\left(\forall\left(\mathbb{Q}\ni a<b\in\mathbb{Q}\right)\;\;\lim U_n\,[a,b]<\infty\right)=1$$

נובע שמתקיים

$$\mathbb{P}\left(\exists\lim_{n\to\infty} X_n \in [-\infty,\infty]\right)=1$$

כי המאורע המשלים הוא

$$\limsup_{n\to\infty} X_n \neq \liminf_{n\to\infty} X_n$$

ואז ביניהם יש זוג רציונאליים שעלינו לחצות אינסוף פעמים. כדי לסיים, נבחין שמהלמה של פאטו,

$$\mathbb{E}\left(\liminf_n |X_n|\right) \leq \liminf_n \mathbb{E}\left(|X_n|\right) < \infty$$

מכאן נקבל

$$\mathbb{P}\left(\exists\lim_{n\to\infty} X_n < \infty\right)=1$$

■

**דוגמאות** כאשר $X$ הילוך מקרי פשוט, אזי $X$ מרטינגל שאינו מתכנס. לעומת זאת, אם נגדיר זמן עצירה $T=\inf\{n\mid X_n=1\}$, אזי $X^T$ מרטינגל חסום בנורמת $L^1$, ולכן מתכנס. מכאן, $T<\infty$ כמעט תמיד. ברור כי

$$X_T=X_\infty=\lim_{n\to\infty}X_{n\wedge T}$$

מקיים $\mathbb{P}\left(X_\infty=1\right)=1$. נבחין כי $\mathbb{E}X_{n\wedge T}=\mathbb{E}X_0=0$, אך $\mathbb{E}X_T=1$, כלומר אין התכנסות בנורמת $L^1$.

**מסקנה 1.2** על־מרטינגל אי שלילי מתכנס כמעט תמיד לגבול סופי.

**הוכחה:**

$$\mathbb{E}\left|X_n\right|=\mathbb{E}X_n\le\mathbb{E}X_0$$

■

## 2 מרטינגלים חסומים בנורמת $L^2$

**הגדרה 2.1** מרטינגל הוא חסום בנורמה $L^2$ אם

$$\sup_n\mathbb{E}\left(X_n^2\right)<\infty$$

**טענה 2.2** (משפט פיתגורס) יהי $X$ מרטינגל חסום בנורמת $L^2$. מתקיים

$$\mathbb{E}\left(X_n^2\right)=\mathbb{E}\left(X_0^2\right)+\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(\left(X_k-X_{k-1}\right)^2\right)$$

שוויון זה נובע מכך שלכל $k<l$ מתקיים

$$\mathbb{E}\left(\left(X_k-X_{k-1}\right)\left(X_l-X_{l-1}\right)\right)=0$$

**הוכחה:** נראה קודם שלכל $a<b\le c<d$ מתקיים

$$\mathbb{E}\left(\left(X_b-X_a\right)\left(X_d-X_c\right)\right)=0$$

אכן:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\left(X_b-X_a\right)\left(X_d-X_c\right)\right)&=\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\left(X_b-X_a\right)\left(X_d-X_c\right)\mid\mathcal{F}_c\right)\right)=\\&=\mathbb{E}\left(\left(X_b-X_a\right)\mathbb{E}\left(X_d-X_c\mid\mathcal{F}_c\right)\right)=\\&=\mathbb{E}\left(\left(X_b-X_a\right)\left(\mathbb{E}\left(X_d\mid\mathcal{F}_c\right)-X_c\right)\right)=\\&=\mathbb{E}\left(\left(X_b-X_a\right)\left(X_c-X_c\right)\right)=0\end{aligned}$$

כעת, נרשום

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} (X_k - X_{k-1})$$

ואז

$$\mathbb{E}\left(X_n^2\right) = \mathbb{E}\left(X_0^2\right) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left((X_k - X_{k-1})^2\right) + 2\mathbb{E}\left(X_0\left(\sum_{k=1}^{n} X_k - X_{k-1}\right)\right)$$

הגורם האחרון מתאפס - אפשר להוכיח על ידי התניה בסיגמא אלגברה $\mathcal{F}_0$. ■

**משפט 2.3** (התכנסות מרטינגלים חסומים בנורמת $L^2$) יהי $X$ מרטינגל חסום בנורמת $L^2$. אזי $X$ מתכנס כמעט תמיד ובנורמת $L^2$.

**הוכחה:** חסימות בנורמת $L^2$ גוררת חסימות בנורמת $L^1$. לכן $X$ מתכנס כמעט תמיד. נסמן

$$X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n$$

כעת, לכל $m > n$, מתקיים

$$\mathbb{E}\left((X_m - X_n)^2\right) = \sum_{k=n+1}^{m} \left((X_k - X_{k-1})^2\right)$$

מהטענה הקודמת (למשל כי $(X_{n+k} - X_n)_{k=0}^{\infty}$ מרטינגל שחסום נורמת $L^2$). מהלמה של פאטו, בלקיחת $m \to \infty$:

$$\mathbb{E}\left((X_\infty - X_n)^2\right) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{E}\left((X_k - X_{k-1})^2\right)$$

לכן תהיה התכנסות בנורמת $L^2$ כאשר

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left((X_k - X_{k-1})^2\right) < \infty$$

זה אכן קורה כי

$$\mathbb{E}\left(X_n^2\right) - \mathbb{E}\left(X_0^2\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left((X_k - X_{k-1})^2\right)$$

וכי $X$ חסום בנורמת $L^2$. ■

נדגיש נקודה שעלתה במהלך ההוכחה. ראינו כי

$$\mathbb{E}\left(X_n^2\right)-\mathbb{E}\left(X_0^2\right)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(\left(X_k-X_{k-1}\right)^2\right)$$

ולכן נובע שהמרטינגל חסום בנורמת $L^2$ אם ורק אם

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{E}\left(\left(X_k-X_{k-1}\right)^2\right)<\infty$$

בנוסף, נובע ממה שעשינו שאם $X$ חסום בנורמת $L^2$ אזי לכל $n\geq 0$ מתקיים

$$\mathbb{E}\left(\left(X_\infty-X_n\right)^2\right)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\mathbb{E}\left(\left(X_k-X_{k-1}\right)^2\right)$$

### 2.1 סכומים של משתנים מקריים בלתי תלויים

**שאלה** ששאלנו בתחילת הקורס. יהיו $\left(\varepsilon_n\right)_{n\geq 1}$ סימנים מקריים - כלומר הם בלתי תלויים וכן

$$\mathbb{P}\left(\varepsilon_n=1\right)=\mathbb{P}\left(\varepsilon_n=-1\right)=\frac{1}{2}$$

האם

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n\frac{1}{n^\alpha}<\infty$$

ממשפט 0-1 של קולמוגורוב, ההתכנסות היא בהסתברות אחד או לכל $\alpha$ נתון. עבור $\alpha>1$, הטור מתכנס בהחלט, ולכן מתכנס. עבור $\alpha\leq 0$ ברור שזה לא יכול להתכנס. נותרה השאלה עבור $0\leq\alpha\leq\frac{1}{2}$.

**תשובה** אם ורק אם $\alpha>\frac{1}{2}$.

**משפט 2.4** יהיו $\left(D_k\right)$ בלתי תלויים ובעלי תוחלת 0 ושונות סופית.

1. אם $\sum\mathbb{E}\left(D_k^2\right)<\infty$ אזי $\sum D_k$ מתכנס כמעט תמיד.
2. נניח כי $\left(D_k\right)$ חסומים, כלומר קיים $K$ כך שלכל $k$ מתקיים $\mathbb{P}\left(D_k<K\right)=1$. אזי אם $\sum D_k$ מתכנס כמעט תמיד אזי $\sum\mathbb{E}\left(D_k^2\right)<\infty$.

**הוכחה:**

1. נגדיר מרטינגל

$$X_0=0$$
$$X_n=\sum_{k=1}^{n}D_k$$

ביחס לפילטרציה $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_k = \sigma(D_1, \ldots, D_k)$. אז

$$\mathbb{E}\left(X_n^2\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(D_k^2\right)$$

מהנתון, נקבל כי $X$ חסום בנורמת $L^2$, כי הטור באגף ימין מתכנס. לכן $X$ מתכנס כמעט תמיד ובנורמת $L^2$, מהמשפט הקודם.

2. נגדיר תהליך חדש:

$$Y_n = \left(\sum_{k=1}^{n} D_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(D_k^2\right)$$

אזי $Y$ מרטינגל. אכן,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(X_n^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) &= \mathbb{E}\left(\left(X_{n-1}+D_n\right)^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = X_{n-1}^2 + 2\mathbb{E}\left(X_{n-1}D_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) + \mathbb{E}\left(D_n^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = \\ &= X_{n-1}^2 + \mathbb{E}\left(D_n^2\right)\end{aligned}$$

ומכאן

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(Y_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = \mathbb{E}\left(X_n^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(D_k^2\right) = \\ = X_{n-1}^2 + \mathbb{E}\left(D_n^2\right) - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(D_k^2\right) = Y_{n-1}^2\end{aligned}$$

נבחר סף $c > 0$, ונגדיר זמן עצירה $T = \inf\{n \mid |X_n| > c\}$. נסתכל בתהליך העצור, $Y^T$. זהו מרטינגל, ולכן, לכל $n$,

$$0 = \mathbb{E}Y_n^T = \mathbb{E}\left(Y_{n\wedge T}\right) = \mathbb{E}\left(X_{n\wedge T}^2\right) - \sum_{k=1}^{n\wedge T} \mathbb{E}\left(D_k^2\right)$$

כלומר קיבלנו כי

$$\sum_{k=1}^{n\wedge T} \mathbb{E}\left(D_k^2\right) = \mathbb{E}\left(X_{n\wedge T}^2\right) \le (c+K)^2$$

מהנתון, $X$ מכתנס, ולכן נובע כי $\sup|X_n|$ סופי כמעט תמיד. לכן קיים $c$ כך שמתקיים

$$\mathbb{P}\left(\sup_n |X_n| > c\right) < 1$$

נשתמש באותו $c$, ונבחין שעל המאורע $\sup|X_n| \le c$ מתקיים $T = \infty$. כלומר,

$$\mathbb{P}(T = \infty) > 0$$

ממה שראינו, ומהתכנסות מונוטונית, נקבל

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{T}\mathbb{E}\left(D_k^2\right)\right)\leq (c+K)^2$$

נסיק מכאן כי

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{E}\left(D_k^2\right)<\infty$$

■

**הערה 2.5** ראינו שמספיק בסעיף השני לדרוש

$$\mathbb{P}\left(\sup_n\left|\sum_{k=1}^{n}D_k\right|<\infty\right)>0$$

ואז מהסעיף הראשון נקבל כי שהטור מתכנס למעשה.

קיבלנו דיכוטומיה: עבור טור של משתנים מקריים חסומים ובלתי תלויים בעלי תוחלת אפס, מתקיים אחד מהשניים:

1. הטור מתכנס כמעט תמיד וסכום השונויות סופי.
2. $\mathbb{P}\left(\sup_n\left|\sum_{k=1}^{n}D_k\right|<\infty\right)=0$.

אפשר לחזק את 2 להיות

$$\mathbb{P}\left(\limsup\sum_{k=1}^{n}D_k=-\liminf\sum_{k=1}^{n}D_k=\infty\right)=1$$

## 2.2 משתנים שאינם בעלי תוחלת 0

נרצה להסיר מהמשפט האחרון את ההנחה כי התוחלות 0. בשיעור הבא.