<u>פונקציות ממשיות</u>

ⓒ ארזים

8 בינואר 2017

1 מכפלת מידות

1.1 מידת בורל לבג על $\mathbb{R}^d$

1.1.1 קיום

טענה 1.1 נניח כי $\left(\mathbb{R}^{d_1},\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{d_1}\right),\mu_1\right)$ מידת בורל לבג, וכן $\left(\mathbb{R}^{d_2},\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{d_2}\right),\mu_2\right)$ מידת בורל לבג. אזי

$$\left(\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2},\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{d_1}\right)\otimes\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{d_2}\right),\mu_1\times\mu_2\right)$$

היא מידת בורל לבג על המרחב $\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}=\mathbb{R}^{d_1+d_2}$.

הוכחה: ראינו כי

$$\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{d_1}\right)\otimes\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{d_2}\right)=\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{d_1+d_2}\right)$$

ולכן $\mu_1\times\mu_2$ מידת בורל על $\mathbb{R}^{d_1+d_2}$. בנוסף,

$$\left(\mu_1\times\mu_2\right)\left(\left[0,1\right]^{d_1+d_2}\right)=\mu_1\left(\left[0,1\right]^{d_1}\right)\cdot\mu_2\left(\left[0,1\right]^{d_2}\right)=1\cdot1=1$$

יש לבדוק כעת אינווריאנטיות להזזות. די לבדוק אינווריאנטיות להזזות בווקטורים $u\in\mathbb{R}^{d_1}$, ובוקטורים $v\in\mathbb{R}^{d_2}$. נבדוק את הראשון: עבור $u\in\mathbb{R}^{d_1}$ נגדיר מידת בורל $\left(\mu_1\times\mu_2\right)_u$ על $\mathbb{R}^{d_1+d_2}$ לפי

$$\left(\mu_1\times\mu_2\right)\left(A\right)=\left(\mu_1\times\mu_2\right)\left(A+u\right)$$

כאשר $A\in\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{d_1+d_2}\right)$. עבור מלבן מדיד $E\times F$ מתקיים

$$\begin{aligned}\left(\mu_1\times\mu_2\right)_u\left(E\times F\right)&=\left(\mu_1\times\mu_2\right)\left(E\times F+u\right)=\left(\mu_1\times\mu_2\right)\left(\left(E+u\right)\times F\right)=\\&=\mu_1\left(E+u\right)\mu_2\left(F\right)=\mu_1\left(E\right)\mu_2\left(F\right)\end{aligned}$$

לאור יחידות מכפלת מידות נובע $\left(\mu_1\times\mu_2\right)_u=\left(\mu_1\times\mu_2\right)$, ולכן המידה אינווריאנטית להזזה ביחס לוקטור $u\in\mathbb{R}^{d_1}$. ■

מסקנה 1.2 לכל $n \geq 1$ קיימת מידת בורל לבג $\left(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^n\right), \mu_n\right)$, ולכן גם מידת לבג $m_n = \overline{\mu_n}$.

1.1.2 פעולת טרנספורמציות לינאריות על $\mathbb{R}^d$

טענה 1.3 תהי $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ טרנספורמציה לינארית. אם $E \subseteq \mathbb{R}^d$ מדידה לבג, אזי $T\left(E\right) \subseteq \mathbb{R}^d$ מדידה לבג וכן

$$m\left(T\left(E\right)\right) = \left|\det T\right| m\left(E\right)$$

הוכחה: ראשית נניח כי T הפיכה. נסמן בתור μ את מידת בורל לבג על $\mathbb{R}^d$. נגדיר

$$\mu_T : \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right) \to [0,\infty] : E \to \mu_T\left(E\right) = \mu\left(T\left(E\right)\right)$$

זו מידה, אינווריאנטית להזזות, וכן

$$\mu_T\left(T^{-1}\left([0,1]^d\right)\right) = \mu\left([0,1]^d\right) = 1$$

לכן $\mu \neq 0$, ומאחר והקבוצה $T^{-1}\left([0,1]^d\right)$ מכילה קבוצה פתוחה, נובע כי μ סופית על קבוצות בורל חסומות. ממשפט היחידות, נובע שקיים $\nu_T > 0$ עבורו

$$\mu_T = \nu_T \mu$$

כלומר

$$\mu_T\left(E\right) = \nu_T \mu\left(E\right)$$

נשים לב כי ν_T נקבע באופן יחיד על פי השוויון לעיל עבור קבוצת בורל E יחידה עם $0 < \mu\left(E\right) < \infty$. מכאן,

$$\nu_{T_1 T_2} = \nu_{T_1} \cdot \nu_{T_2}$$

עבור שתי טרנספורמציות הפיכות. ברור כי $\nu_{\mathrm{Id}} = 1$, ולכן

$$\nu_{T^{-1}} = \nu_T^{-1}$$

נבדוק את ν_T עבור T שהמטריצה שלה היא $\begin{pmatrix} a & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$, עבור $a > 0$. במקרה הזה:

$$\nu_T = \nu_T \mu\left([0,1]^d\right) = \mu_T\left([0,1]^d\right) = \mu\left(T\left([0,1]^d\right)\right) =$$
$$= \mu\left([0,a] \times [0,1]^{d-1}\right) = a \cdot 1 = a = \left|\det T\right|$$

אם המטריצה של T היא $\begin{pmatrix}1 & \alpha & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}$, עבור $\alpha \neq 0$, אזי T, T^{-1} דומות ולכן

$$\nu_T = \nu_{T^{-1}} = \nu_T^{-1}$$

ולכן

$$\nu_T = 1 = |\det T|$$

אם T אורתוגונלית אזי $T(B(0,1)) = B(0,1)$ ולכן $\nu_T = 1 = |\det T|$.
כל טרנספורמציה לינארית הפיכה ניתן לכתוב כמכפלה של שלושת סוגי הטרנספורמציות האלה, ולכן נקבל

$$\mu(T(E)) = |\det T| \mu(E)$$

כעת, תהי T הפיכה ותהי E מדידה לבג. יש פירוק זר $E = A \cup N$, כאשר A בורל, $N \subseteq B$ כאשר B בורל ממידה 0. אז מתקיים $m(E) = \mu(A)$. אזי

$$\begin{aligned} \mu(TB) &= 0 \\ TN &\subseteq TB \\ TE &= TA \cup TN \end{aligned}$$

TB, TA בורל, ולכן TE מדידה לבג, וכן

$$m(TE) = \mu(TA) = |\det T| \mu(A) = |\det T| m(E)$$

לבסוף, נניח כי T לא הפיכה. אזי $\det T = 0$. די להוכיח $m(T(\mathbb{R}^d)) = 0$. אכן, יש טרנספורמציה לינארית S הפיכה עבורה

$$ST(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$$

ואז

$$|\det S| m(T(\mathbb{R}^d)) = m(ST(\mathbb{R}^d)) = m(\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}) = 0$$

$\det S \neq 0$ שכן S הפיכה, ולכן $m(T(\mathbb{R}^d)) = 0$. ■

מסקנה 1.4 תהי $T:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ טרנספורמציה לינארית הפיכה. אזי

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} f\left(Tx\right)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\left|\det T\right|}\int\limits_{\mathbb{R}^d} f\left(y\right)\,\mathrm{d}y$$

לפי מידת לבג. כאשר $f:\mathbb{R}^d\to[0,\infty]$ מדידה לבג, או $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ אינטגרבילית לבג.

הוכחה: די לבדוק את המקרה הראשון, שכן בשני נפצל לחלק ממשי ומדומה, ואז לשלילי וחיובי.

בעזרת קירוב $f\nearrow s_n$ על ידי פשוטות, די להניח כי $f=s$ פשוטה, ולכן די להניח כי $f=\chi_E$ עבור $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)$ (זהו סימון לקבוצות המדידות לבג שנשתמש בו הרבה). אז:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}\chi_E\left(Tx\right)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{\mathbb{R}^d}\chi_{T^{-1}E}\left(x\right)\,\mathrm{d}x=m\left(T^{-1}\left(E\right)\right)=\left|\det T\right|^{-1}m\left(E\right)=\left|\det T\right|^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\chi_E\left(y\right)\,\mathrm{d}yd$$

■

1.2 משפט טונלי

משפט 1.5 (טונלי) יהיו $\left(Y,\Sigma_y,\lambda\right),\left(X,\Sigma_x,\mu\right)$ מרחב מידה סיגמא סופיים. תהי $f:X\times Y\to[0,\infty]$ מדידה לפי $\Sigma_x\otimes\Sigma_y$. אזי מתקיים:

1. $x\to f\left(x,y\right)\in[0,\infty]$ מדידה לכל $y\in Y$.
2. $y\to f\left(x,y\right)\in[0,\infty]$ מדידה לכל $x\in X$.
3. $y\to\int_X f\left(x,y\right)\,\mathrm{d}\mu\left(x\right)\in[0,\infty]$ מדידה.
4. $x\to\int_Y f\left(x,y\right)\,\mathrm{d}\lambda\left(y\right)\in[0,\infty]$ מדידה.
5. מתקיים

$$\int\limits_{X\times Y} f\,\mathrm{d}\mu\times\lambda=\int\limits_X\left(\int\limits_Y f\left(x,y\right)\,\mathrm{d}\lambda\left(y\right)\right)\,\mathrm{d}\mu\left(x\right)$$

6. מתקיים

$$\int\limits_{X\times Y} f\,\mathrm{d}\mu\times\lambda=\int\limits_Y\left(\int\limits_X f\left(x,y\right)\,\mathrm{d}\mu\left(x\right)\right)\,\mathrm{d}\lambda\left(y\right)$$

הוכחה: אם $f=\chi_E$ עבור $E\in\Sigma_x\otimes\Sigma_y$ ראינות זאת כבר: אכן, לכל $x\in X$ מתקיים

$$\chi_E\left(x,y\right)=\chi_{E_x}\left(y\right)$$

וראינו כי $E_x\in\Sigma_y$ ולכן הפונקציה

$$y\to\chi_E\left(x,y\right)=\chi_{E_x}\left(y\right)$$

מדידה. בנוסף

$$\int\limits_Y\chi_E\left(x,y\right)\,\mathrm{d}\lambda\left(y\right)=\int\limits_Y\chi_{E_x}\left(y\right)\,\mathrm{d}\lambda\left(y\right)=\lambda\left(E_x\right)$$

וראינו כי הפונקציה $x\to\lambda\left(E_x\right)$ מדידה. לכן סעיפים $2,4$ נכונים במקרה הזה, וראינו גם כי

$$\int\limits_X\left(\int\limits_Y\chi_E\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x=\int\limits_X\lambda\left(E_x\right)\,\mathrm{d}x$$

לפי הגדרה מתקיים

$$\left(\mu\times\lambda\right)\left(E\right)=\int\limits_{X\times Y}\chi_E\,\mathrm{d}\left(\mu\times\lambda\right)$$

לכן גם סעיף 5 נכון. הוכחת $1,3,6$ דומה.
מכאן נובע המשפט גם לפונקציות פשוטות $s\geq 0$. כעת, תהי $f\geq 0$ כלשהי. ניקח $s_n\nearrow f$ פשוטות. לכל $x\in X$ מתקיים

$$s_n\left(x,\cdot\right)\nearrow f\left(x,\cdot\right)$$

ולכן $y\to f\left(x,y\right)$ מדידה, וסעיף 2 נכון. לפי משפט ההתכנסות המונוטונית מתקיים לכל $x\in X$:

$$\int\limits_Y s_n\left(x,y\right)\,\mathrm{d}y\nearrow\int\limits_Y f\left(x,y\right)\,\mathrm{d}y$$

ובפרט סעיף 4 נכון. לבסוף, סעיף 5 נכון כי:

$$\int\limits_X\left(\int\limits_Y s_n\left(x,y\right)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x\nearrow\int\limits_X\left(\int\limits_Y f\left(x,y\right)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x$$

כמו כן ידוע כי

$$\int\limits_{X\times Y} s_n \,\mathrm{d}\left(\mu\times\lambda\right) \nearrow \int\limits_{X\times Y} f \,\mathrm{d}\left(\mu\times\lambda\right)$$

ולכן גם 5 נכון. הוכחת 1,3,6 דומה. ■

1.3 משפט פוביני

משפט 1.6 (פוביני) יהיו $\left(X,\Sigma_x,\mu\right)$, $\left(Y,\Sigma_Y,\lambda\right)$ שני מרחב מידה סיגמא סופיים, ותהי $f:X\times Y\to\mathbb{C}$ אינטגרבילית ביחס למידה $\mu\times\lambda$. אזי הפונקציות $x\to f\left(x,y\right),y\to f\left(x,y\right)$ הן מדידות לכל $x\in X,y\in Y$ בהתאמה. נסמן בתור $M\subseteq Y$ (בהתאמה $N\subseteq X$) את אוסף הנקודות $y\in Y$ (בהתאמה $x\in X$) עבורן הפונקציה $x\to f\left(x,y\right)$ (בהתאמה $y\to f\left(x,y\right)$) אינה אינטגרבילית. אזי M (בהתאמה N) מדידה וזניחה. נגדיר את הפונקציה $x\to\int_Y f\left(x,y\right)\,\mathrm{d}y$ להיות 0 על M, ואת $y\to\int_X f\left(x,y\right)\,\mathrm{d}x$ להיות 0 על N. אזי הפונקציות הללו אינטגרביליות אחרי השינוי, ומתקיים

$$\int\limits_X\left(\int\limits_Y f\left(x,y\right)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{X\times Y} f\,\mathrm{d}\mu\times\lambda=\int\limits_Y\left(\int\limits_X f\left(x,y\right)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y$$

הוכחה: על ידי מעבר לחלק ממשי וחלק מרוכב, מספיק להניח כי f ממשית. אם $f\geq0$ המשפט נובע ממשפט טונלי. נפרק $f=f_+-f_-$. אזי $f_\pm$ אינטגרביליות.

לכן לכל $x\in X$ הפונקציה $f\left(x,\cdot\right)=f_+\left(x,\cdot\right)-f_-\left(x,\cdot\right)$ מדידה, וכמו כן, $f\left(x,\cdot\right)$ אינטגרבילית אם ורק אם $y\to f_+\left(x,y\right),y\to f_-\left(x,y\right)$ אינטגרביליות. אבל מהמקרה של $f\geq0$ נובע כי אוסף אותם x בהן פונקציות אלה לא אינטגרבילי הוא קבוצה מדידה וזניחה. לכן N מדידה וזניחה, ובאופן דומה גם M. כמו כן

$$\int\limits_Y f\left(x,y\right)\,\mathrm{d}y=\int\limits_Y f_+\left(x,y\right)\,\mathrm{d}y-\int\limits_Y f_-\left(x,y\right)\,\mathrm{d}y$$

מהמקרה בו $f\geq0$ נובע כי צד ימין מתאר פונקציה מדידה של $x\in N^c$ ואינטגרבילית על N^c. לכן אחרי התיקון (כלומר איפוס על M), הפונקציה בצד שמאל מדידה ואינטגרבילית, והאינטגרל לא משתנה. לבסוף:

$$\int\limits_X\left(\int\limits_Y f\left(x,y\right)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x=\int\limits_X\left(\int\limits_Y f\left(x,y\right)\,\mathrm{d}y\right)\chi_{N^c}\,\mathrm{d}x=\int\limits_X\left(\int\limits_Y f_+\,\mathrm{d}y\right)\chi_{N^c}\,\mathrm{d}x-\int\limits_X\left(\int\limits_Y f_-\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x=$$

$$=\int\limits_X\left(\int\limits_Y f_+\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x-\int\limits_X\left(\int\limits_Y f_-\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{X\times Y} f_+-\int\limits_{X\times Y} f_-=\int\limits_{X\times Y} f$$

■

יישום אופייני

נניח כי $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ מדידה וכי

$$\int\limits_X \left(\int\limits_Y |f(x,y)| \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x < \infty$$

אזי לפי טונלי לגבי $|f|$, נובעי כי

$$\int\limits_{X\times Y} |f| \,\mathrm{d}(\mu \times \lambda) < \infty$$

ולכן f אינטגרבילית לפי $\mu \times \lambda$ וניתן להשתמש בפוביני:

$$\int\limits_X \left(\int\limits_Y f(x,y) \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_{X\times Y} f \,\mathrm{d}(\mu \times \lambda)$$

1.4 השלמה של מכפלת מידות לבג.

נסמן m_i את מידת לבג על $\mathbb{R}^i$, μ_i את מידת בורל לבג על $\mathbb{R}^i$. אזי $m_i = \overline{\mu_i}$. כמו כן, ראינו כי

$$\mu_{i+j} = \mu_i \times \mu_j \tag{1}$$

לכן

$$m_{i+j} = \overline{\mu_{i+j}} = \overline{\mu_i \times \mu_j} \tag{2}$$

טענה 1.7 מתקיים

$$m_{i+j} = \overline{m_i \times m_j} \tag{3}$$

הוכחה: ראשית,

$$\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{i+j}\right) = \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^i\right) \otimes \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^i\right) \subseteq \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^i\right) \otimes \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^i\right) \tag{4}$$

כמו כן,

$$m_i \times m_j \mid_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^i)\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}^j)} = \mu_i \times \mu_j \tag{5}$$

שכן ערך צד שמאל עבור כל מלבן מדיד $A\times B\subseteq\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{i}\right)\otimes\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{j}\right)$ הוא

$$(m_i\times m_j)(A\times B)=m_i(A)\,m_j(B)=\mu_i(A)\,\mu_i(B)=(\mu_i\times\mu_j)(A\times B)$$

וכעת ממשפט יחידות מכפלת מידות, נקבל את השוויון.

כעת, תהי $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{i+j}\right)$. אזי יש $A,B\in\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{i+j}\right)$ וכן $N\subseteq B$ כך שמתקיים $E=A\cup N$ (זר) וכן $\mu_{i+j}(B)=0$, ואז $m_{i+j}(E)=\mu_{i+j}(A)$. נובע מתוך (4) כי $A,B\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{i}\right)\otimes\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{j}\right)$, ולפי $(5),(1)$ נובע

$$\begin{aligned} m_i\times m_j(B)&=0\\ m_{i+j}(E)&=(m_i\times m_j)(A)\end{aligned}$$

מכאן נובע כי E מדידה ביחס להשלמה $\overline{m_i\times m_j}$ וכן כי

$$m_{i+j}(E)=m_i\times m_j(A)=\overline{m_i\times m_j}(E)$$

עד כאן ראינו כי

$$m_{i+j}=\overline{m_i\times m_j}\,|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^{i+j})}\tag{6}$$

נותר להוכיח שאם Q מדידה לפי $\overline{m_i\times m_j}$, אזי $Q\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{i+j}\right)$. ראשית נראה כי

$$\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{i+j}\right)\supseteq\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{i}\right)\otimes\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{j}\right)\tag{7}$$

אכן, תהי $F\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{i}\right)$. אזי יש $M,N\in\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{i}\right)$ עם $M\subseteq F\subseteq N$, $\mu(M\backslash N=0)$. לכן

$$M\times\mathbb{R}^{j}\subseteq F\times\mathbb{R}^{j}\subseteq N\times\mathbb{R}^{j}$$

וכן

$$\mu_{i+j}\left(\left(M\times\mathbb{R}^{j}\right)\setminus\left(N\times\mathbb{R}^{j}\right)\right)=\mu_{i+j}\left((M\backslash N)\times\mathbb{R}^{j}\right)=\mu_i(M\backslash N)\times\mu_j\left(\mathbb{R}^{j}\right)=0$$

לכן $F\times\mathbb{R}^{j}\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{i+j}\right)$. באופן דומה אם $F'\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{j}\right)$ אזי $\mathbb{R}^{i}\times F'\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{i+j}\right)$, ולכן גם

$$F\times F'=\left(F\times\mathbb{R}^{j}\right)\cap\left(\mathbb{R}^{i}\times F'\right)\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{i+j}\right)$$

ולכן נובע (7). לבסוף, תהי Q מדידה לפי $\overline{m_i\times m_j}$. אזי יש $H\subseteq Q\subseteq K$ עם $H,K\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{i}\right)\otimes\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{j}\right)$, וכן $(m_i\times m_j)(K\backslash H)=0$. מתוך (7) נקבל

$$H,K\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{i+j}\right)$$

ומתוך (6) נקבל

$$m_{i+j}\left(K\backslash H\right)=\overline{m_i\times m_j}\left(K\backslash H\right)=m_i\times m_j\left(K\backslash H\right)=0$$

ולכן Q מדידה לפי ההשלמה של m_{i+j}, אבל m_{i+j} שלמה ולכן Q מדידה לפי m_{i+j}.
כלומר $Q\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{i+j}\right)$. ■

לאור זה ניתן משפטים:

משפט 1.8 יהיו $\left(X,\Sigma_x,\mu\right),\left(Y,\Sigma_y,\lambda\right)$ שתי מידות שלמות וסיגמא סופיות. תהי $\left(X\times Y,\overline{\Sigma_x\otimes\Sigma_y},\overline{\mu\times\lambda}\right)$ מידת השלמת המכפלה.
עבור $f:X\times Y\to\left[0,\infty\right]$ (בהתאמה $f:X\times Y\to\mathbb{C}$) מדידה (אינטגרבילית) ביחס לסיגמא אלגברה $\overline{\Sigma_x\otimes\Sigma_y}$ (למידה $\overline{\mu\times\lambda}$), מתקיים:

1. $x\to f\left(x,y\right)$ מדידה (אינטגרבילית) כמעט לכל y, $y\to f\left(x,y\right)$ מדידה (אינטגרבילית) כמעט לכל x.

2. הפונקציות

$$x\to\int\limits_Y f\left(x,y\right)\,\mathrm{d}y$$
$$y\to\int\limits_X f\left(x,y\right)\,\mathrm{d}x$$

מוגדרות כמעט בכל מקום ומדידות (אינטגרביליות).

3.

$$\int\limits_X\left(\int\limits_Y f\left(x,y\right)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{X\times Y}f\,\mathrm{d}\overline{\mu\times\lambda}=\int\limits_Y\left(\int\limits_X f\left(x,y\right)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y$$

הוכחה: המקרה של פונקציה מרוכבת נובע מהמקרה של פונקציה לתוך $\left[0,\infty\right]$ על ידי חלוקהנ לחלק ממשי ומרוכב, ואז שלילי וחיובי.
לכן נניח כי $f:X\times Y\to\left[0,\infty\right]$ מדידה לפי $\overline{\Sigma_x\otimes\Sigma_y}$. ראינו שקיימת $g:X\times Y\to\left[0,\infty\right]$ מדידה לפי $\Sigma_x\otimes\Sigma_y$ וכך שמתקיים $f=g$ כמעט בכל מקום ביחס למידה $\mu\times\lambda$. המשפט נכון עבור g (גם בלי התניית "כמעט בכל מקום" בסעיפים 1,2). תהי $N\in\Sigma_x\otimes\Sigma_y$ כך שמתקיים $\left(\mu\times\lambda\right)\left(N\right)=0$ וכן $\{f\neq g\}\subseteq N$. ראינו כי לכל $y\in Y$, $N^y\in\Sigma_x$. מאחר ומתקיים

$$\int\limits_Y\mu\left(N^y\right)\,\mathrm{d}\lambda\left(y\right)=\left(\mu\times\lambda\right)\left(N^y\right)=0$$

נובע שמכעט לכל y $\mu(N^y)=0$, ולכן לכל $y\in Y$

$$\{x\in X \mid f(x,y)\neq g(x,y)\}\subseteq N^y$$

ולכן כמעט לכל y הפונקציה $g(\cdot,y)$, $f(\cdot,y)$ שוות כמעט בכל מקום לפי μ. מאחר שזו מידה שלמה, נובע שמעט לכל $y\in Y$ הפונקציה $x\to f(x,y)$ מדידה (כי $x\to g(x,y)$ מדידה), ולכן החלק הראשון של 1 נכון. החלק השני דומה. כמו כן נובע כי כמעט לכל $y\in Y$ מתקיים

$$\int\limits_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)=\int\limits_X g(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

מאחר והפונקציה $y\to\int_X g(x,y\,\mathrm{d}\mu(x))$ מדידה, ומאחר והמידה λ שלמה, נובע כי $y\to\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)$ מדידה. לכן החלק השני של 2 נכון, והחלק השני דומה. לבסוף, נובע מנכונות המשפט עבור g:

$$\int\limits_Y\left(\int\limits_X f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int\limits_Y\left(\int\limits_X g(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int\limits_{X\times Y} g\,\mathrm{d}(\mu\times\lambda)=\int\limits_{X\times Y} g\,\mathrm{d}\left(\overline{\mu\times\lambda}\right)=\int\limits_{X\times Y} f\,\mathrm{d}\left(\overline{\mu\times\lambda}\right)$$

ולכן החלק הימני של 3 נכון, והחלק השני נובע באופן דומה. ■

2 מרחבי L^p (על מרחב מידה כללי)

הגדרה 2.1 מינוח $1\leq p,q\leq\infty$ נקראים <u>צמודים</u> אם $1=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$. המקרים החשובים: $p=q=2$, $p=1,q=\infty$, $p=\infty,q=1$.

2.1 אי שוויונות

משפט 2.2 (אי שוויון יאנג) יהי $1<p,q<\infty$ צמודים. אזי לכל $\alpha,\beta\geq 0$ מתקיים

$$\alpha\beta\leq\frac{\alpha^p}{p}+\frac{\beta^q}{q}$$

הוכחה: בעזרת רציפות אפשר להניח כי p,q רציונאליים. נסמן

$$\frac{1}{p}=\frac{n}{n+m},\frac{1}{q}=\frac{m}{n+m}$$

ונסמן

$$b=\beta^q=\beta^{\frac{n+m}{m}}$$
$$a=\alpha^p=\alpha^{\frac{n+m}{n}}$$

ואז

$$\alpha\beta = a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} = a^{\frac{n}{n+m}} b^{\frac{m}{n+m}} = \sqrt[n+m]{a^n b^m} \leq \frac{na+mb}{n+m} =$$
$$= \frac{n}{n+m} a + \frac{m}{n+m} b = \frac{a}{p} + \frac{b}{q} = \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$$

■

כעת, יהי (X, Σ, μ).

משפט 2.3 (אי שוויון הלדר) יהיו $1 < p, q < \infty$ צמודים, $f, g : X \to [0, \infty]$ מדידות. אזי

$$\int_X fg \, \mathrm{d}\mu \leq \left(\int_X f^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X g^q \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

נשים לב שאם $t > 0$ אזי $\infty^t = \infty$.

הוכחה: אם $\int f^p = 0$ אז $f = 0$ כמעט בכל מקום וצד שמאל הוא 0, והשוויון טריוויאלי. לכן נניח $\int f^p > 0$, $\int g^q > 0$. אם $\int f^p = \infty$, אזי מאחר ומתקיים $\int g^q > 0$ נקבל כי צד ימין הוא ∞, והאי שוויון טריוויאלי. לכן נניח $\int f^p, \int g^q < \infty$. נסמן

$$A = \left(\int f^p \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$B = \left(\int g^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

ונסמן $F = \frac{f}{A}, G = \frac{g}{B}$. ואז נקבל

$$\int F^p = 1 = \int G^q$$

לכן

$$\frac{1}{AB} \int fg = \int FG \leq \int \frac{F^p}{p} + \frac{G^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

לכן

$$\int fg \leq AB = \left(\int f^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int g^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

■

משפט 2.4 (אי שוויון מינקובסקי) יהי $1 \le p < \infty$ וכן $f, g : X \to [0, \infty]$ מדידות. אזי

$$\left(\int\limits_X (f+g)^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int\limits_X f^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_X g^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

הוכחה: אם $p = 1$ ידוע שקיים שוויון. לכן נניח כי $1 < p < \infty$, ויהי $1 < q < \infty$ הצמוד. אפשר להניח $\int f^p, \int g^p < \infty$ כי אחרת הכל טריוויאלי. מתקיים

$$\left(\frac{f+g}{2}\right)^p \le \frac{f^p + g^p}{2}$$

כי הפונקציה x^p קמורה. לכן

$$\int (f+g)^p \le 2^{p-1} \int f^p + g^p < \infty$$

לפי הלדר נקבל

$$\int f (f+g)^{p-1} \le \left(\int f^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int (f+g)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

אבל $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, כלומר $pq = p + q$, ולכן $(p-1)\,q = pq - q = p + q - q = p$, לכן

$$\int f (f+g)^{p-1} \le \left(\int f^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int (f+g)^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

באופן דומה:

$$\int g (f+g)^{p-1} \le \left(\int g^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int (f+g)^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

נחבר ונקבל

$$\int (f+g)^p \le \left(\left(\int f^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int g^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \left(\int (f+g)^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

אם $\int (f+g)^p = 0$ אז האי שוויון טריוויאלי, ולכן נניח כי הוא חיובי. נקבל:

$$\left(\int (f+g)^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int (f+g)^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \le \left(\int f^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int g^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

■

הגדרה 2.5 נסמן לכל $f : X \to \mathbb{C}$ מדידה ולכל $1 \le p < \infty$:

$$||f||_p = \left(\int\limits_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

מסקנה 2.6 אם $1 < p, q < \infty$ צמודים אזי

$$\int |fg| \le ||f||_p \, ||g||_q$$

אם $1 \le p < \infty$ אזי

$$||f+g||_p \le ||f||_p + ||g||_p$$

הערה 2.7 מתקיים גם לכל $1 \le p < \infty$, $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$||\lambda f||_p = |\lambda| \, ||f||_p$$

$$\left(\int |f+g|^p \right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int (|f| + |g|)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

הגדרה 2.8 מרחב נורמי הוא זוג $(V, ||\cdot||)$ כאשר V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$ (או $\mathbb{R}$) וכן $||\cdot|| : V \to [0, \infty)$ פונקציה כך שמתקיים:

1. $||u|| = 0 \iff u = 0$.
2. $||u+v|| \le ||u|| + ||v||$.
3. $||\lambda u|| = |\lambda| \, ||u||$.