

פונקציות ממשיות

© ארזים

29 בינואר 2017

1 השתנות של פונקציה

הגדרה 1.1 תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה. מסמנים את ההשתנות של f על $[a, b]$ להיות

$$V_a^b = V_a^b(f) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^k |f(x_i) - f(x_{i-1})| \mid a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_k = b \right\} \in [0, \infty]$$

תכונות

1. אם מוסיפים נקודת חלוקה הסכום אינו קטן. לכן אפשר להתייחס בסופרימום לחלוקות המכילות נקודות קבועות מראש.

2. בפרט, אם $a \leq c \leq b$ אזי על ידי התייחסות לחלוקות המכילות את c נקבל

$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$$

3. מתקבלת פונקציית ההשתנות

$$[a, b] : [0, \infty) : x \rightarrow V_a^x(f)$$

פונקציה זו מונוטונית עולה, שכן אם $a \leq x \leq y \leq b$ אזי

$$V_a^y = V_a^x + V_x^y \geq V_a^x$$

4. אם ניקח $x_0 = a, x_1 = b$ נקבל

$$V_a^b(f) \geq |f(b) - f(a)|$$

5. מתקיימים הדברים הבאים:

$$V_a^b(f+g) \leq V_a^b(f) + V_a^b(g)$$

$$V_a^b(\lambda f) = |\lambda| V_a^b(f)$$

6. אומרים כי f בעלת השתנות חסומה על $[a, b]$ אם $V_a^b(f) < \infty$. במקרה זה, לכל $x \in [a, b]$ מתקיים $V_a^x(f) < \infty$.

7. אם f, g הן בעלות השתנות חסומה על $[a, b]$ אזי

$$|V_a^b(f) - V_a^b(g)| \leq V_a^b(f-g) < \infty$$

וזאת משום שמתקיים

$$V_a^b(f) = V_a^b((f-g) + g) \leq V_a^b(f-g) + V_a^b(g)$$

$$V_a^b(f) - V_a^b(g) \leq V_a^b(f-g)$$

באופן דומה מקבלים גם להיפך.

8. תהי f בעלת השתנות חסומה על $[a, b]$, אזי הפונקציה

$$[a, b] \rightarrow [0, \infty) : x \rightarrow V_a^x(f) - f(x)$$

מונטונית עולה. אכן: נניח כי $a \leq x \leq y \leq b$ אזי

$$V_a^y - f(y) = V_a^x + V_x^y - f(y) = V_a^x - f(x) + V_x^y - (f(y) - f(x)) \geq V_a^x - f(x)$$

9. אם f מונוטונית על $[a, b]$ אזי f בעלת השתנות חסומה על $[a, b]$ וכן

$$V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|$$

10. **טענה 1.2** תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה. אזי f בעלת השתנות חסומה על $[a, b]$ אם ורק אם f היא הפרש של שתי פונקציות מונוטוניות עולות על $[a, b]$.

הוכחה: כיוון אחד נובע מתכונה 9 (הפרש של שתי מונוטוניות יישאר בעל השתנות חסומה). הכיוון השני נובע מתכונות 3, 8 בעזרת

$$f(x) = V_a^x - (V_a^x - f(x))$$

■

מסקנה 1.3 אם f בעלת השתנות חסומה על $[a, b]$ אזי f גזירה בכל מקום על $[a, b]$.

טענה 1.4 תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה בהחלט. אזי f בעלת השתנות חסומה על $[a, b]$, ופונקציית ההשתנות

$$[a, b] \rightarrow [0, \infty) : x \rightarrow V_a^x(f)$$

היא רציפה בהחלט.

הוכחה: נשתמש בהגדרת הרציפות בהחלט עבור $\varepsilon = 1$. קיים $\delta > 0$ עבורו אם $(x_i, x'_i) \subseteq [a, b]$ זרים בזוגות עם

$$\sum_{i=1}^k (x'_i - x_i) < \delta$$

אזי

$$\sum_{i=1}^k |f(x'_i) - f(x_i)| < 1$$

מכאן נובע כי אם $a \leq \xi \leq \xi' \leq b$ מקיימות $\xi' - \xi < \delta$, אזי $V_\xi^{\xi'} \leq 1$. לבסוף, יהיו $a = \xi_0 \leq \xi_1 \leq \dots \leq \xi_n = b$ עם $|\xi_{i+1} - \xi_i| < \delta$. אזי

$$V_a^b = \sum_i V_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \leq n$$

לכן f בעלת השתנות חסומה. כעת, נוכיח כי $x \rightarrow V_a^x(f)$ רציפה בהחלט. יהי $\varepsilon > 0$. יהי $\delta > 0$ כך שאם $(x_i, x'_i) \subseteq [a, b]$ זרים בזוגות עם

$$\sum_{i=1}^n (x'_i - x_i) < \delta$$

אזי

$$\sum_{i=1}^n |f(x'_i) - f(x_i)| < \varepsilon$$

יהיו $(x_i, x'_i) \subseteq [a, b]$ זרים בזוגות עם

$$\sum_{i=1}^n x'_i - x_i < \delta$$

נסמן חלוקות של $[x_i, x'_i]$ בתור

$$x_i = t_{i,0} \leq t_{i,1} \leq \dots \leq t_{i,k_i} = x'_i$$

אזי הקטעים

$$\{(t_{i,j-1}, t_{i,j}) \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k_i\}$$

זרים בזוגות, וסכום אורכיהם שווה בדיוק

$$\sum_{i=1}^n x'_i - x_i < \delta$$

מכאן נקבל כי

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{k_i} |f(t_{i,j}) - f(t_{i,j-1})| \right) < \varepsilon$$

לכן

$$\sum_{i=1}^n V_{x_i}^{x'_i}(f) = \sum_{i=1}^n \sup \left\{ \sum_{j=1}^{k_i} |f(t_{i,j}) - f(t_{i,j-1})| \right\} \leq \varepsilon$$

לבסוף,

$$\sum_{i=1}^n |V_a^{x'_i} - V_a^{x_i}| = \sum_{i=1}^n (V_a^{x'_i} - V_a^{x_i}) = \sum_{i=1}^n V_{x_i}^{x'_i} \leq \varepsilon$$

האי שוויון הזה נכון לכל בחירה של קטעים (x_i, x'_i) כמו למעלה, ולכן נובע כי $x \rightarrow V_a^x(f)$ רציפה בהחלט.

■

מסקנה 1.5 תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה בהחלט. אזי הפרש של שתי פונקציות מונוטוניות רציפות בהחלט.

■

הוכחה: $x \rightarrow V_a^x - f(x), x \rightarrow V_a^x$ הן מונוטוניות ורציפות בהחלט.

1.1 נגזרת פונקציית ההשתנות

טענה 1.6 תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה בהחלט. אזי פונקציית ההשתנות $[a, b] \rightarrow [0, \infty) : x \rightarrow V_a^x(f)$ רציפה בהחלט ומונוטונית (ראינו) ומתקיים

$$(V_a^x)' = |f'(x)|$$

כמעט בכל מקום על $[a, b]$, ולכן

$$V_a^b = \int_a^b |f'(t)| dt$$

הוכחה: תהי x נקודה בה f , $V_a^x(f)$ גזירות. אזי

$$(V_a^x)' = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{V_a^{x+h} - V_a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{V_x^{x+h}}{h} \geq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{h} = \left| \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| = |f'(x)|$$

מצד שני, לכל שתי נקודות $a \leq \xi \leq \xi' \leq b$ מתקיים

$$V_\xi^{\xi'}(f) \leq \int_\xi^{\xi'} |f'(t)| dt$$

אכן, לכל חלוקה $\xi = u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_n = \xi'$ מתקיים

$$\sum_{i=1}^n |f(u_i) - f(u_{i-1})| = \sum_{i=1}^n \left| \int_{u_{i-1}}^{u_i} f'(t) dt \right| \leq \sum_{i=1}^n \int_{u_{i-1}}^{u_i} |f'(t)| dt = \int_\xi^{\xi'} |f'(t)| dt$$

לכן בכל x שבה V_a^x גזירה וכן

$$\frac{d \int_a^x |f'(t)| dt}{dx}(x) = |f'(x)|$$

מתקיים

$$(V_a^x)' = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{V_a^{x+h} - V_a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{V_x^{x+h}}{h} \leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\int_x^{x+h} |f'(t)| dt}{h} = |f'(x)|$$

■

2 משפט לוזין

תזכורת אם (X, Σ) מרחב מדיד וכן $f : X \rightarrow [0, \infty]$ פונקציה, הגדרנו קירוב סטנדרטי $s_n \nearrow f$ על ידי פונקציות פשוטות:

$$s_n(x) = \begin{cases} 2^n & 2^n \leq f(x) \\ \frac{k}{2^n} & (\frac{k}{2^n} \leq f(x) \leq \frac{k+1}{2^n}, 0 \leq k \leq 4^n - 1) \end{cases}$$

תכונה אם $f|_A$ חסומה, עבור $A \subseteq X$, אזי $s_n \rightarrow f$ במידה שווה על A (כי אם $0 \leq f(x) \leq 2^k$ אזי $|f(x) - s_k(x)| \leq \frac{1}{2^k}$).

הערה 2.1 תהי $f : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ מדידה לבג. אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $A \subseteq \mathbb{R}^d$ מדידה לבג כך שעל A תת קבוצות חסומות של f , חסומה, וכן $m(A^c) < \varepsilon$.

הוכחה: נסמן

$$E_0 = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| \leq 1\}$$

$$E_j = \{x \in \mathbb{R}^d \mid j \leq \|x\| \leq j+1\}$$

לכל j מתקיים $m(E_j) < \infty$ וכן

$$E_j \supseteq E_j \cap \{f \geq 1\} \supseteq E_j \cap \{f \geq 2\} \supseteq \dots$$

לכן יש עבורו n_j

$$m(E_j \cap \{f \geq n_j\}) < \frac{\varepsilon}{2^j}$$

נסמן

$$A_j = E_j \cap \{f \geq n_j\}$$

ולבסוף ניקח

$$A = \bigcup_{j=0}^{\infty} A_j$$

■

משפט 2.2 (לזיון) תהי $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ מדידה לבג. אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיימת רציפה עבורה $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$

$$m(\{f \neq \varphi\}) < \varepsilon$$

משפט 2.3 (לזיון, גרסה שנייה) תהי $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ מדידה לבג. אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $A \subseteq \mathbb{R}^d$ מדידה עם $m(A^c) < \varepsilon$ וכן $f|_A : A \rightarrow \mathbb{C}$ רציפה.

הוכחה: ראשית, אם המשפט נכון עבור שתי פונקציות f, f' אזי הוא נכון גם עבור $f + f'$ (מקבלים A, A' ולוקחים $A \cap A'$ עבור $f + f'$). בנוסף, אם המשפט נכון עבור f , הוא נכון עבור αf , כאשר $\alpha \in \mathbb{C}$. לכן נוכל להניח כי $f : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$.
יהי $\varepsilon > 0$. צריך למצוא $A \subseteq \mathbb{R}^d$ מדידה לבג עבורה $f|_A$ רציפה וכן $m(A^c) < \varepsilon$.
ראשית נניח כי $f = \chi_E$, כאשר E מדידה לבג. קיימות $F \subseteq E \subseteq G \subseteq \mathbb{R}^d$ סגורה, כאשר $F \cup G^c \subseteq \mathbb{R}^d$ סגורה. נבדוק כי רציפה $f|_{F \cup G^c}$ ואז ניתן לקחת $A = F \cup G^c$, כי $m(A^c) = m(F^c \cap G) = m(G \setminus F) < \varepsilon$.

נניח כי $F \cup G^c \ni x_n \rightarrow x \in F \cup G^c$. אם $x \in F$, אז קיים N עבורו לכל $n \geq N$ מתקיים $x_n \in F$. אחרת $x \in F^c$ הינו גבול של סדרה מתוך G^c , אבל G^c סגורה, וכן $x \notin G^c$ בסתירה.

מכאן נובע כי $f(x_n) = 1$ לכל $n \geq N$ ולכן $f(x) = 1$. אם $x \in G^c$, באופן דומה, קיים N עבורו לכל $n \geq N$ מתקיים $x_n \in G^c$ ומסיקים $f(x) = 0$. מכאן נובע שהמשפט נכון עבור $f = \chi_E$ עבור E מדידה. לכן המשפט נכון גם עבור פונקציה פשוטה. כעת, נניח כי f מדידה לבג וחסומה על כל קבוצה חסומה. יהי $f \nearrow s_n$ הקירוב הסטנדרטי. אזי $s_n \rightarrow f$ במידה שווה על כל קבוצה חסומה. יהי $\varepsilon > 0$. לכל n יש $A_n \subseteq \mathbb{R}^d$ מדידה כך שהפונקציה $s_n|_{A_n}$ וכן $m(A_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. נגדיר

$$A = \bigcap_n A_n$$

אזי

$$m(A^c) = m\left(\bigcup_n A_n^c\right) < \varepsilon$$

כמו כן, רציפה לכל n . לכל k מתקיים $s_n|_{A \cap B(0,k)} \rightarrow f|_{A \cap B(0,k)}$ במידה שווה, ולכן $f|_{A \cap B(0,k)}$ רציפה לכל k , ולכן $f|_A$ רציפה.

המקרה של $f: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ כללית (מדידה לבג): יהי $\varepsilon > 0$. קיימת $A_1 \subseteq \mathbb{R}^d$ מדידה לבג ועם $m(A_1^c) < \varepsilon$ וכן $f|_{A_1}$ חסומה על כל קבוצה חסומה. נסמן $g = f \cdot \chi_{A_1}: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$. אז g חסומה על כל קבוצה חסומה. לכן קיימת $A_2 \subseteq \mathbb{R}^d$ מדידה כך שמתקיים $m(A_2^c) < \varepsilon$ וכן $g|_{A_2}$ רציפה. נקח $A = A_1 \cap A_2$. אזי $f|_A = g|_A$ רציפה, וכן $m(A^c) = m(A_1^c \cup A_2^c) < 2\varepsilon$. ■

הערה 2.4 הגרסה השנייה לא אומרת כי f רציפה על כל נקודה בתוך A , אלא רק שכל נקודה $x \in A$ היא נקודת רציפות של $f|_A$.

טענה 2.5 שתי הגרסאות של משפט לויזן שקולות.

הוכחה: גרסה ראשונה \Leftarrow גרסה שנייה: ניקח $A = \{x \mid f(x) = \varphi(x)\}$. גרסה שנייה \Leftarrow גרסה ראשונה: בסימוני הגרסה השנייה, קיימת $F \subseteq A$ עם $m(A \setminus F) < \varepsilon$ ולכן $m(F^c) < 2\varepsilon$, כעת,

$$f|_F = \varphi|_F$$

היא רציפה, וכן F סגורה. ממשפט טיצה, קיימת φ רציפה עבורה $\varphi|_F = f|_F$, ואז $m(f \neq \varphi) \leq m(F^c) < 2\varepsilon$. ■

3 קונבולוציה על \mathbb{R}^d

3.1 מדידות

תהי $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ מדידה לבג. אזי הפונקציה

$$\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}: (x, y) \rightarrow f(x)$$

היא מדידה. נשתמש בטרנספורמציה הלינארית ההפיכה $T : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ המוגדרת

$$T(x, y) = (x - y, y)$$

בעזרת T נסיק כי $(x, y) \rightarrow f(x - y)$ מדידה לבג. אם גם g מדידה על \mathbb{R}^d אזי הפונקציה

$$\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C} : (x, y) \rightarrow f(x - y)g(y)$$

מדידה.

3.2 אינטגרביליות

כעת נניח כי f, g אינטגרביליות על \mathbb{R}^d . אזי

$$\begin{aligned} \int \int |f(x - y)g(y)| \, d(m \times m)(x, y) &= \int \left(\int |f(x - y)| |g(y)| \, dx \right) dy = \\ &= \int \left(\int |f(x - y)| \, dx \right) g(y) \, dy = \int \left(\int |f(x)| \, dx \right) |g(y)| \, dy = \\ &= \left(\int |f| \right) \left(\int |g| \right) = \|f\|_1 \|g\|_1 \end{aligned}$$

לכן הפונקציה $(x, y) \rightarrow f(x - y)g(y)$ אינטגרבילית על $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. ממשפט פוביני נובע כי הפונקציה $y \rightarrow f(x - y)g(y)$ אינטגרבילית כמעט לכל x , והפונקציה

$$x \rightarrow \int f(x - y)g(y) \, dy$$

המוגדרת כמעט בכל מקום, היא אינטגרבילית וכן

$$\int \left(\int f(x - y)g(y) \, dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f(x - y)g(y) \, d(m \times m) = \int \left(\int f(x - y)g(y) \, dx \right) dy = \left(\int f \right) \left(\int g \right)$$

הגדרה 3.1 מסמנים את הקונבולוציה להיות

$$(f * g)(x) = \int f(x - y)g(y) \, dy$$

אזי $f * g$ מוגדרת כמעט בכל מקום, $f * g$ אינטגרבילית וכן

$$\int f * g = \int f \cdot \int g$$

3.3 מרחבי L_p, L_q

טענה 3.2 יהיו $1 < p, q < \infty$ צמודים. נניח $f \in L^1 \cap L^p, g \in L^1 \cap L^q$ (נסמן גם $\tilde{f}(t) = f(-t)$). אזי $f * g$ רציפה.

הוכחה: נניח כי $x_n \rightarrow x$ אזי

$$\begin{aligned} |(f * g)(x_n) - (f * g)(x)| &= \left| \int f(x_n - y)g(y) dy - \int f(x - y)g(y) dy \right| \leq \\ &\leq \int |f(x_n - y) - f(x - y)| |g(y)| dy \leq \\ &\leq \sqrt[p]{\int |f(x_n - y) - f(x - y)|^p dy} \|g\|_q = \\ &= \sqrt[p]{|\tilde{f}(y - x_n) - \tilde{f}(y - x)|^p dy} \|g\|_q \rightarrow 0 \end{aligned}$$

■

יישום לסכום קבוצות: אם $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$, נסמן

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

משפט 3.3 אם $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ מדידות לבג וכן $m(A) > 0, m(B) > 0$. אז $A + B$ מכילה קטע פתוח לא ריק.

הוכחה: על ידי החלפת A, B בקבוצות $A \cap B(0, n), B \cap B(0, n)$, אפשר להניח כי A, B חסומות. אזי $\chi_A, \chi_B \in L^2$. לכן $\chi_A * \chi_B$ רציפה. נשים לב שאם $\chi_A * \chi_B \neq 0$, אזי $x \in A + B$ אכן, נתון כי

$$0 \neq \int \chi_A(x - y) \chi_B(y) dy$$

ולכן קיימת $y \in B$ עבורו $x - y \in A$, ואז $x = (x - y) + y$. לכן די להוכיח שקיים קטע פתוח I לא ריק, עבורו $\chi_A * \chi_B$ לא מתאפסת. אבל רציפה, ולכן מספיק להוכיח כי $\chi_A * \chi_B \neq 0$. אבל

$$\int \chi_A * \chi_B = \int \chi_A \int \chi_B = m(A) m(B) \neq 0$$

■

ולכן $\chi_A * \chi_B \neq 0$.