

## פונקציות ממשיות

© ארזים

14 בנובמבר 2016

### 1 קבוצות בורל

הערה 1.1 אם  $Y \in B(X)$ , נקבל

$$B(Y) = \{E \subseteq Y \mid E \in B(X)\} \subseteq B(X)$$

**פירוק מרחב** אם  $X$  מרחב מטרי ומתקיים

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

כאשר כל  $X_n$  בורל אזי

$$B(X) = \left\{ \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \mid \forall n \ A_n \in B(X_n) \right\}$$

עבור  $A \in B(X)$  נקח  $A_n = A \cap X_n$ , ונקבל

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

**הומאומורפיזם** אם  $f : X \rightarrow Z$  הומאומורפיזם (של מרחבים מטריים). אזי עבור  $A \subseteq X$  מתקיים  $A \in B(X) \iff f(A) \in B(Z)$

**דוגמא** עבור  $X = [-\infty, \infty]$ ,  $B(X)$  נוצרת (כסיגמא, אלגברה) על ידי כל אחד מהאוספים הבאים:

1.  $\{-\infty, \alpha \mid -\infty < \alpha < \infty\}$

2.  $\{-\infty, \alpha \mid -\infty < \alpha < \infty\}$

3.  $\{\alpha, \infty \mid -\infty < \alpha < \infty\}$

4.  $\{\alpha, \infty \mid -\infty < \alpha < \infty\}$

**הוכחה:** ראשית אלה הן קבוצות בורל. נבדוק את סעיף 1. תהי  $O \subseteq X$  קבוצה פתוחה. אזי  $O \cap \mathbb{R}$  קבוצה פתוחה של  $\mathbb{R}$  במטריקה הרגילה, ולכן היא איחוד בן מניה של קטעים פתוחים. לכן די לבדוק כי הסיגמא אלגברה הנוצרת על ידי הקבוצה בסעיף 1 מכילה את  $\{\infty\}, \{-\infty\}, (a, b)$  לכל  $-\infty < a < b < \infty$  (ואז נובע שהיא מכילה גם את  $(a, \infty), (b, \infty)$  מתקיים).

$$\{\infty\} = \left( \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [-\infty, n) \right)^c$$

$$\{-\infty\} = \left( \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} [-\infty, n) \right)^c$$

עבור  $-\infty < a < b < \infty$ , לכל  $k \in \mathbb{N}$  עבורו מתקיים  $a + \frac{1}{k} < b$  מתקיים

$$\left[ a + \frac{1}{k}, b \right) = [-\infty, b) \setminus [-\infty, a + \frac{1}{k})$$

$$(a, b) = \bigcup_{\substack{b \in \mathbb{N} \\ a + \frac{1}{k} < b}} \left[ a + \frac{1}{k}, b \right)$$

ולכן סעיף 1 אכן יוצר את  $B(X)$ . סעיף 4 הוא פשוט המשלימים של 1. כעת, סעיפים 2,3 מתקבלים מסעיפים 1,4 בהתאמה על ידי ההומיאומורפיזם  $f(x) = -x$ . ■

**הערה 1.2** אם  $Y \subseteq X$  תת מרחב,  $S \subseteq 2^X$  יוצר את  $B(X)$ , אזי  $S|_Y$  יוצר את  $B(Y)$ :

$$(S|_Y)^* = S^*|_{Y=B(X)}|_{Y=B(Y)}$$

**מסקנה 1.3**  $B([0, \infty])$  נוצר על ידי קבוצות מהסוג  $(\alpha, \infty]$  (צמצום של סעיף 3 מהדוגמה).

**מסקנה 1.4**  $B(\mathbb{R})$  נוצר על ידי הקבוצות מהסוג  $(-\infty, \alpha)$  (צמצום של סעיף 1 מהדוגמה) וכן על ידי קבוצות מהצורה  $[\alpha, \infty)$  (צמצום של סעיף 3 מהדוגמה).

## 2 פונקציות מדידות

### 2.1 סיגמא אלגברה מושרית על ידי פונקציה

תהי  $f: X \rightarrow Y$  פונקציה.

## 2.1 הערה

$$\begin{aligned}f^{-1}(E^c) &= (f^{-1}(E))^c \\f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) &= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(A_\lambda) \\f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) &= \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(A_\lambda) \\f^{-1}(A \setminus B) &= f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)\end{aligned}$$

**2.2 מסקנה** 1. אם  $\Sigma_y$  היא סיגמא אלגברה על  $Y$  אזי

$$f^{-1}(\Sigma_y) := \{f^{-1}(A) \mid A \in \Sigma_y\} \subseteq 2^X$$

היא סיגמא אלגברה על  $X$ .

2. אם  $\Sigma_x$  היא סיגמא אלגברה על  $X$  אזי

$$\{B \subseteq Y \mid f^{-1}(B) \in \Sigma_x\} \subseteq 2^Y$$

היא סיגמא אלגברה על  $Y$ .

## 2.2 פונקציות מדידות

**2.3 הגדרה** יהי  $(X, \Sigma)$  מרחב מדיד, ויהי  $Y$  מרחב מטרי. פונקציה  $f : X \rightarrow Y$  נקראת מדידה אם

$$A \in B(Y) \Rightarrow f^{-1}(A) \in \Sigma$$

**2.4 הערה** בסימונים לעיל, יהי  $S \subseteq 2^Y$  אוסף של תתקבוצות של  $Y$  שיוצר את  $B(Y)$ , אזי  $f : X \rightarrow Y$  מדידה אם ורק אם לכל  $E \in S$  מתקיים  $f^{-1}(E) \in \Sigma$ .

**הוכחה:** אכן, לפי מסקנה 2.2, סעיף 2, אוסף התת קבוצות  $A \subseteq Y$  עבורן  $f^{-1}(A) \in \Sigma$  הוא סיגמא אלגברה, המכילה את  $S$  לפי התנאי הנתון, ולכן מכילה את  $B(Y)$ . ■

**בפרט:**

1.  $f : X \rightarrow Y$  מדידה אם ורק אם לכל  $O \subseteq Y$  הקבוצה  $f^{-1}(O)$  מדידה (בתוך  $X$ , כלומר  $f^{-1}(O) \in \Sigma$ )

2.  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  מדידה אם ורק אם  $f^{-1}((\alpha, \infty])$  מדידה לכל  $\alpha > 0$ .

**הערה 2.5** אם  $Y_1 \subseteq Y$  תת מרחב,  $f : X \rightarrow Y_1$  פונקציה, אזי  $f$  מדידה אם ורק אם ההרכבה  $i \circ f$ , כאשר  $i$  היא השיכון של  $Y_1$  בתוך  $Y$ , היא מדידה.

**הוכחה:** אכן, לכל  $E \in B(Y)$  מתקיים

$$f^{-1}(E \cap Y_1) = f^{-1}(E)$$

■ וכאשר  $E$  עובר על פני  $B(Y)$ ,  $E \cap Y_1$  עובר על  $B(Y_1)$ .

**הגדרה 2.6** אם  $X, Y$  מרחבים מטריים,  $f : X \rightarrow Y$  פונקציה,  $f$  נקראת מדידה בורל אם  $f$  מדידה כפונקציה מהמרחב המדיד  $(X, B(X))$  למרחב המטרי  $Y$ . כלומר אם  $E \in B(Y) \Rightarrow f^{-1}(E) \in B(X)$ .

**טענה 2.7** יהיו  $X, Y$  מרחבים מטריים, ותהי  $f : X \rightarrow Y$  רציפה. אזי  $f$  מדידה בורל.

**הוכחה:** די לבדוק שלכל  $O \subseteq Y$  פתוחה,  $f^{-1}(O) \subseteq X$  בורל. אבל  $f^{-1}(O)$  פתוחה בתוך  $X$  (כי  $f$  רציפה) ולכן  $f^{-1}(O) \in B(X)$ . ■

### 2.2.1 הרכבת פונקציה מדידה עם פונקציה מדידה בורל

**טענה 2.8** יהי  $(X, \Sigma)$  מרחב מדיד, ויהי  $X, Y$  מרחבים מטריים. תהי  $f : X \rightarrow Y$  מדידה, ותהי  $g : Y \rightarrow Z$  מדידה (בורל). אזי  $g \circ f$  מדידה.

**הוכחה:** לכל  $A \in B(Z)$  מתקיים  $A \in B(Z) \Rightarrow g^{-1}(A) \in B(Y)$  ולכן  $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A)) \in \Sigma$ . ■

### 2.2.2 פירוק

**טענה 2.9** יהי  $Y$  מרחב מטרי, ויהי  $(X, \Sigma)$  מרחב מטרי. נניח כי  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ , כאשר לכל  $n$  מתקיים  $X_n \in \Sigma$ . תהי  $f : X \rightarrow Y$ . אזי  $f$  מדידה אם ורק אם  $f|_{X_n} : X_n \rightarrow Y$  מדידה לכל  $n$ .

**הוכחה:** נניח כי  $f$  מדידה. לכל  $A \in B(Y)$  מתקיים

$$(f|_{X_n})^{-1}(A) = X_n \cap f^{-1}(A) \in \Sigma|_{X_n}$$

נניח כי  $f|_{X_n}$  מדידה לכל  $n$ . לכל  $A \in B(Y)$  מתקיים

$$X_n \cap f^{-1}(A) \in \Sigma|_{X_n} \subseteq \Sigma$$

ולכן גם

$$f^{-1}(A) = \bigcup_n (X_n \cap f^{-1}(A)) \in \Sigma$$

■

### 2.2.3 מכפלה

**תזכורת** מרחב מטרי  $Y$  נקרא ספרבילי אם קיימת בו קבוצת בת מניה צפופה. אם  $Y$  לא ריקה, ויש בה סדרה  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ , הסדרה הזו צפופה אם מתקיים  $\overline{\{y_n\}_{n=1}^{\infty}} = Y$ . נסמן אוסף של כדורים:

$$\mathcal{D} = \{B_Y(y_i, r) \mid i \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Q}\}$$

אוסף זה הוא בן מניה, ומורכב מקבוצות פתוחות. כל קבוצה פתוחה היא איחוד של תת אוסף של האוסף הזה.

**הערה 2.10** אם  $Y, Z$  ספרביליים, אזי  $Y \times Z$  ספרבילי. אם  $\overline{\{y_i\}_{i=1}^{\infty}} = Y, \overline{\{z_j\}_{j=1}^{\infty}} = Z$  אזי  $\overline{\{(y_i, z_j)\}_{i,j=1}^{\infty}} = Y \times Z$

**טענה 2.11** יהי  $(X, \Sigma)$  מרחב מדיד, ויהי  $Y, Z$  מרחבים מטריים ספרביליים. יהיו  $f : X \rightarrow Y, g : X \rightarrow Z$  פונקציות מדידה. אזי הפונקציה

$$(f, g) : X \rightarrow Y \times Z \\ x \mapsto (f(x), g(x))$$

מדידה.

**הוכחה:** נשתמש במטריקת המקסימום על  $Y \times Z$ . די להוכיח, בסימוני ההערה, שלכל כדור פתוח  $B = B_{Y \times Z}((y_i, z_j), r) \subseteq Y \times Z$  מתקיים  $(f, g)^{-1}(B) \in \Sigma$ .

$$B = B_Y(y_i, r) \times B_Z(z_j, r) \\ (f, g)^{-1}(B) = f^{-1}(B_Y(y_i, r)) \cap g^{-1}(B_Z(z_j, r)) \in \Sigma$$

■

נוכל לקחת  $X = Y \times Z, f = p_Y, g = p_Z$ , ואז לכל  $A \subseteq Y, B \subseteq Z$  מתקיים  $f^{-1}(A) = A \times Z, g^{-1}(B) = Y \times B$ . ניקח את הסיגמא אלגברה  $\Sigma$  על  $X = Y \times Z$  שנוצרת על ידי  $A \times Z, Y \times B$  עבור  $A \in \mathcal{B}(Y), B \in \mathcal{B}(Z)$ . לכן היא נוצרת על ידי קבוצות מהסוג

$$\{A \times B \mid A \in \mathcal{B}(Y), B \in \mathcal{B}(Z)\}$$

השאלה היא האם  $\mathcal{B}(Y \times Z) \subseteq \Sigma$  (שכן  $(f, g)$  היא הזהות). מסמנים

$$\Sigma = \mathcal{B}(Y) \otimes \mathcal{B}(Z)$$

וישנה השאלה

$$\mathcal{B}(Y \times Z) \stackrel{?}{=} \mathcal{B}(Y) \otimes \mathcal{B}(Z)$$

#### 2.2.4 פונקציות אל $\mathbb{C}, \mathbb{R}, [0, \infty], [-\infty, \infty]$

יהי  $(X, \Sigma)$  מרחב מדיד.

**טענה 2.12** אם  $f : X \rightarrow [-\infty, \infty], g : X \rightarrow [-\infty, \infty]$  מדידות, אזי המכפלה  $f \cdot g : X \rightarrow [-\infty, \infty]$  מדידה.

**הוכחה:**  $f \cdot g$  היא ההרכבה של  $(f, g)$  עם הפונקציה  $(x, y) \rightarrow x \cdot y$ , והפונקציה  $(f, g)$  מדידה. נותר לבדוק שפונקציית המכפלה היא מדידה. ניתן לראות זאת על ידי פירוק התחום להיות

$$\{[-\infty, \infty], (-\infty, 0), \{0\}, (0, \infty), \{\infty\}\}^2 \rightarrow [-\infty, \infty]$$

כל קבוצה מהצורה  $A \times B$  מהתחום הזה היא מדידה בתוך  $[-\infty, \infty] \times [-\infty, \infty]$ . ואז למשל פונקציית הכפלה מהתחום  $(-\infty, 0) \times (0, \infty)$  היא רציפה. כמו כן, למשל, מהתחום  $\{\infty\} \times (-\infty, 0)$  היא קבועה, ולכן רציפה. כך ניתן להמשיך. ■

**טענה 2.13** באותם סימונים כמו בטענה הקודמת, נסמן  $A = \{x \in X \mid f(x) + g(x) \in [-\infty, \infty]\}$  כלומר כל הנקודות שחיבור ערכי  $f, g$  שלהן מוגדר. אזי  $A$  מדידה, וכן

$$f + g|_A : A \rightarrow [-\infty, \infty]$$

היא מדידה. אם למשל נגדיר  $f + g = 0$  לכל  $x \notin A$  נקבל כי  $f + g$  מדידה ומוגדרת על כל  $X$ .

ההוכחה דומה לקודמת.

תהי  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  ראשית ברור כי  $f$  מדידה אם ורק אם  $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$  מדידות. לכן אם  $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$  מדידות, אזי  $f \cdot g, f + g : X \rightarrow \mathbb{C}$  באופן דומה, אם  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  מדידה, אזי  $A = f^{-1}(0) \subseteq X$  מדידה, ולכן  $\frac{1}{f} : A^c \rightarrow \mathbb{C}$  מדידה. אם נגדיר אותה להיות 0 בתוך  $A$ , נקבל פונקציה מדידה מכל  $X$  אל  $\mathbb{C}$ . לבסוף, קיימת פונקציה מוגדרת היטב  $\arg : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow [0, 2\pi)$ . נרחיב אותה על כל  $\mathbb{C}$  על ידי קביעה למשל שהארגומנט של 0 הוא 0. אז נקבל כי  $\arg$  פונקציה מדידה על  $\mathbb{C}$  (על ידי הפירוק

$$\mathbb{C} = \{0\} \cup (0, \infty) \cup (C \setminus [0, \infty))$$

**מסקנה 2.14** אם  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  מדידה, אזי  $\arg f : X \rightarrow [0, 2\pi)$  מדידה, וכן  $|f| = \sqrt{(\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} f)^2}$  מדידה. כמובן מתקיים

$$f = e^{i \cdot \arg f} \cdot |f|$$

### 2.3 אינפימום וסופרימום

יהי  $(X, \Sigma)$  מרחב מדיד. ראינו כי פונקציה  $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$  מדידה אם ורק אם  $f^{-1}((\alpha, \infty])$  מדידה עבור  $-\infty < \alpha < \infty$ .

**מסקנה 2.15** תהינה  $f_n : X \rightarrow [-\infty, \infty]$  סדרת פונקציות בת מניה. אזי

$$\sup_n f_n : x \rightarrow [-\infty, \infty]$$

מדידה, שכן

$$\left(\sup_n f_n\right)^{-1}((\alpha, \infty]) = \bigcup_n f_n^{-1}((\alpha, \infty])$$

כאן מסמנים

$$\left(\sup_n f_n\right)(x) = \sup_n (f_n(x))$$

מאחר וכפל בקבוע  $-1$  הוא הומיאמורפיזם של  $[-\infty, \infty]$ , נובע שגם

$$\inf_n f_n = -\sup_n (-f_n)$$

מדידה גם כן, ולכן גם

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n$$

מדידות. בפרט, אם  $\varphi_n : X \rightarrow [0, \infty]$  מדידות לכל  $n$  טבעי, גם  $\sum \varphi_n : X \rightarrow [0, \infty]$  מדידה (כי הסכומים הסופיים מדידים, וסכום הטור הוא גבול שלהם).

כעת, באופן כללי, אם  $g, h : X \rightarrow [-\infty, \infty]$  מדידות, אזי  $(g, h) : x \rightarrow [-\infty, \infty] \times [-\infty, \infty]$  מדידה. נסמן את האלכסון

$$\Delta = \{(x, x) \mid -\infty \leq x \leq \infty\} \subseteq [-\infty, \infty] \times [-\infty, \infty]$$

אזי  $\Delta$  סגורה במכפלה, ולכן

$$(g, h)^{-1}(\Delta) = \{x \in X \mid g(x) = h(x)\}$$

מדידה.

**מסקנה 2.16** אם  $f_n : (X, \Sigma) \rightarrow [-\infty, \infty]$  מדידות, אזי הקבוצה

$$L = \left\{ x \in X \mid \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right\}$$

מדידה, וכן הפונקציה

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n : L \rightarrow \infty$$

מדידה. באופן דומה,

$$L' = \left\{ x \in L \mid \left| \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right| < \infty \right\}$$

מדידה, והצמצום של פונקציית הגבול על  $L'$  מדיד גם כן.

### 3 הגדרת מידה

#### 3.1 הגדרה

**הגדרה 3.1** יהי  $(X, \Sigma)$  מרחב מדיד. מידה על  $(X, \Sigma)$  היא פונקציה  $\mu : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$  כד שמתקיים:

1.  $\mu(\emptyset) = 0$ .

2. אם  $A_i \in \Sigma$  זרות בזוגות, אזי

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

השלישייה  $(X, \Sigma, \mu)$  נקראת מרחב מידה.

#### מינוחים לגבי סופיות

1. אם  $\mu(X) = 1$ ,  $\mu$  נקראת מידת הסתברות.

2. אם  $\mu(X) < \infty$ ,  $\mu$  נקראת מידה סופית.

3. אם קיים איחוד בן מנייה  $X = \bigcup X_n$ , כאשר  $X_n \in \Sigma$  וכן לכל  $n$  מתקיים  $\mu(X_n) < \infty$ , אזי  $\mu$  נקראת  $\sigma$ -סופית.

**דוגמא** תהי  $X$  קבוצה,  $\Sigma = 2^X$ . נגדיר את המידה הסופרת על  $X$ :

$$\mu(A) = \begin{cases} |A| & |A| < \infty \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$



### 3.2 יחסים ופעולות על מידות

1. אם  $(X, \Sigma, \mu)$  מרחב מידה,  $\Sigma' \subseteq \Sigma$  תת סיגמא אלגברה, אזי  $(X, \Sigma', \mu|_{\Sigma'})$  גם מרחב מידה.

2. אם  $\mu$  מידה על  $X$ ,  $0 \leq a \leq \infty$ , אזי הפונקציה

$$\begin{aligned} a\mu : \Sigma &\rightarrow [0, \infty] \\ A &\mapsto a\mu(A) \end{aligned}$$

היא מידה.

3. אם  $\mu, \mu'$  מידות על  $(X, \Sigma)$  כל שלכל  $A \in \Sigma$  מתקיים  $\mu(A) \leq \mu'(A)$ , כותבים  $\mu \leq \mu'$ .

4. תהיינה  $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots$  הפונקציה

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \sup_n \mu_n : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$$

היא מידה. נראה זאת. לגבי הקבוצה הריקה זה ברור. אם  $A_1, A_2, \dots \in \Sigma$  זרות בזוגות, אזי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^{\infty} \mu_n(A_i) \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A_i)$$

נצדיק את \* : ראשית אם  $a_n, b_n \in [0, \infty]$  סדרות אי שליליות, וקיימים הגבולות

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

אזי מתקיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

כעת, אי שוויון אחד של \* נובע מכך לכל  $n$  מתקיים

$$\mu_n(A_i) \leq \sup_n \mu_n(A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A_i)$$

ולכן לכל  $n$  מתקיים

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_n(A_i) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A_i) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_n(A_i) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A_i) \end{aligned}$$

בכיוון ההפוך, אי השוויון נובע מכך שלכל  $s$  סופי מתקיים

$$\sum_{i=1}^s \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^s \mu_n(A_i) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_n(A)$$

ולכן כאשר  $s \rightarrow \infty$  נקבל

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A_i) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_n(A_i)$$

### 3.3 תכונות ראשונות של מידות

1. אם  $A_1, \dots, A_n \in \Sigma$  זרים בזוגות אזי

$$\mu\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$$

שכן נציב את כל שאר הקבוצות בסדרה בת מניה להיות ריקות.

2. אם  $A \subseteq B$  אזי

$$\mu(A) \leq \mu(B)$$

שכן  $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$ .

3. אם  $A_1, A_2, \dots$  מדידות אזי

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

אכן:

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \mu(A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus (A_2 \cup A_1)) \cup \dots) = \\ &= \mu(A_1) + \mu(A_2 \setminus A_1) + \mu(A_3 \setminus (A_2 \cup A_1)) + \dots \leq \\ &\leq \mu(A_1) + \mu(A_2) + \mu(A_3) + \dots \end{aligned}$$

4. אם  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$  מדידות, אזי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

אכן נציב  $B_2 = A_2 \setminus A_1, B_1 = A_1$  וכן הלאה:

$$B_n = A_n \setminus A_{n-1}$$

ואז

$$\begin{aligned} \mu \left( \bigcup_n A_n \right) &= \mu \left( \bigcup_n B_n \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mu(B_i) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left( \bigcup_{i=1}^n B_i \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \end{aligned}$$

5. אם  $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$  מדידות וכן קיים  $n_0$  כך שעבורו  $\mu(A_{n_0}) < \infty$ , מתקיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right)$$

אפשר לזרוק כל מה שלפני  $n_0$  - לא משנה לחיתוך או למידה.