פונקציות ממשיות

ⓒ ארזים

20 בנובמבר 2016

1 המשך - מידה

ראינו כמה תכונות של מידות, נראה כעת עוד כמה.

1. אם $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ מדידות, וקיים n_0 כך שמתקיים $\mu\left(A_{n_0}\right) < \infty$, אזי

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(A_n\right) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

הוכחה: אפשר להניח $\mu\left(A_1\right) < \infty$. לכל n קיים איחוד זר:

$$A_n = \left(\biguplus_{i=n}^{\infty} \left(A_i \backslash A_{i+1}\right)\right) \uplus \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

לכן מתקיים

$$\infty > \mu\left(A_1\right) \geq \mu\left(A_n\right) = \sum_{i=n}^{\infty} \mu\left(A_i \backslash A_{i+1}\right) + \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

בפרט, עבור $n = 1$, נקבל

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu\left(A_i \backslash A_{i+1}\right) < \infty$$

לכן

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=n}^{\infty} \mu\left(A_i \backslash A_{i+1}\right) = 0$$

וכעת

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n}^{\infty} \left(A_i \backslash A_{i+1}\right) + \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

■

1.1 מידות שלמות והשלמה

הגדרה 1.1 מרחב מידה (X,Σ,μ) נקרא <u>שלם</u> (μ נקראת <u>מידה שלמה</u>) אם מתקיים

$$A\subseteq B,\mu\left(B\right)=0,B\in\Sigma\Rightarrow A\in\Sigma$$

במצב זה נובע כי $0\le\mu\left(A\right)\le\mu\left(B\right)=0$, כלומר $\mu\left(A\right)=0$.

הגדרה 1.2 יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה. נסמן בתור $\overline{\Sigma}$ את האוסף של תת הקבוצות $E\subseteq X$ כך שקיימות $A,B\in\Sigma$ כך שמתקיים $A\subseteq E\subseteq B$, וכן $\mu\left(B\backslash A\right)=0$. במצב זה נגדיר $\overline{\mu}\left(E\right)=\mu\left(A\right)=\mu\left(B\right)$.

טענה 1.3 בתנאי ההגדרה, $\overline{\mu}:\overline{\Sigma}\to[0,\infty]$ מוגדרת היטב, וכן $\overline{\Sigma}$ היא סיגמא אלגברה על X המכילה את Σ. כמו כן $\left(X,\overline{\Sigma},\overline{\mu}\right)$ מרחב מידה שלם עם $\mu=\overline{\mu}\mid_{\Sigma}$. מרחב זה נקרא ההשלמה של (X,Σ,μ).

הוכחה: ראשית נבדוק כי $\overline{\mu}$ מוגדרת היטב. נניח כי $A,A_1\subseteq E\subseteq B,B_1$, וכן $\mu\left(B\backslash A\right)=0,\mu\left(B_1\backslash A_1\right)=0$. אזי מתוך $A\backslash A_1\subseteq E\backslash A_1\subseteq B_1\backslash A_1$, $\mu\left(B_1\backslash A_1\right)=0$, נובע כי $\mu\left(A\backslash A_1\right)=0$. כעת יש איחוד זר:

$$A=\left(A\cap A_1\right)\uplus\left(A\backslash A_1\right)$$

ולכן

$$\mu\left(A\right)=\mu\left(A\cap A_1\right)+\mu\left(A\backslash A_1\right)=\mu\left(A\cap A_1\right)$$

באופן דומה $\mu\left(A_1\right)=\mu\left(A\cap A_1\right)$, ולכן $\overline{\mu}$ מוגדרת היטב.

אם $E\in\Sigma$ נקח $B=A=E$, ונקבל $E\in\overline{\Sigma}$, $\overline{\mu}\left(E\right)=\mu\left(E\right)$.

כעת נבדוק כי $\overline{\Sigma}$ סיגמא אלגברה, וכן כי $\overline{\mu}$ מידה שלמה. $\emptyset\in\Sigma\subseteq\overline{\Sigma}$, וכן $\overline{\mu}\left(\emptyset\right)=\mu\left(\emptyset\right)=0$. נניח כי $E\in\overline{\Sigma}$. אזי בסימונים שלעיל,

$$B^c\subseteq E^c\subseteq A^c$$

וכן מתקיים $\mu\left(A^c\backslash B^c\right)=\mu\left(B\backslash A\right)$, ולכן $E^c\in\overline{\Sigma}$.

כעת תהי $E_1,E_2,\dots$ סדרה של קבוצות מתוך $\overline{\Sigma}$. תהיינה A_n,B_n בהתאם לכל E_n, כך שמתקיים $A_n\subseteq E_n\subseteq B_n$, וכן $\mu\left(B_n\backslash A_n\right)$. אזי נובע כי

$$\bigcup_n A_n\subseteq\bigcup_n E_n\subseteq\bigcup_n B_n$$

האיחודים $\bigcup A_n,\bigcup B_n$ הם איברי Σ, וכן

$$\mu\left(\bigcup B_n\backslash\bigcup A_n\right)\le\mu\left(\bigcup\left(B_n\backslash A_n\right)\right)\le\sum_n\mu\left(B_n\backslash A_n\right)=0$$

ולכן מתקיים $\bigcup E_n \in \overline{\Sigma}$, כלומר $\overline{\Sigma}$ סיגמא אלגברה. אם בנוסף נתון כי $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ זרות בזוגות, אזי $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$זרות בזוגות ולכן

$$\overline{\mu}\left(\bigcup_n E_n\right)=\mu\left(\bigcup_n A_n\right)=\sum_n \mu\left(A_n\right)=\sum_n \overline{\mu}\left(E_n\right)$$

נותר לבדוק כי $\overline{\mu}$ שלמה. נניח כי $\overline{\mu}\left(E\right)=0$ $E_1\subseteq E, E\in\overline{\Sigma},$. נרצה להראות כי $E_1\in\overline{\Sigma}$. קיימות $A,B\in\Sigma$ עם $A\subseteq E\subseteq B$, וכן $\mu\left(B\backslash A\right)=0$, ואז $0=\overline{\mu}\left(E\right)=\mu\left(A\right)=\mu\left(B\right)$. לכן $\emptyset\subseteq E_1\subseteq B$, $\emptyset,B\in\Sigma$, $\mu\left(B\backslash\emptyset\right)=0$, כלומר $E_1\in\overline{\Sigma}$. ■

הגדרה 1.4 יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה. קבוצה $N\subseteq X$ נקראת זניחה אם קיימת $B\in\Sigma$ כך שמתקיים $N\subseteq B$ וכן $\mu\left(B\right)=0$. במקרה זה, מתוך $\emptyset\subseteq N\subseteq B$, $\mu\left(B\backslash\emptyset\right)=0$, נקבל כי $N\in\overline{\Sigma}$, $\overline{\mu}\left(N\right)=\mu\left(\emptyset\right)=0$.

הערה 1.5 כל תת קבוצה של קבוצה זניחה היא זניחה.

טענה 1.6 תיאור $\overline{\Sigma}$ - התנאים הבאים שקולים:

1. $E\in\overline{\Sigma}$.
2. קיימת $N_1\subseteq X$ זניחה, $A\in\Sigma$ עם $E=A\cup N_1$.
3. קיימת $N_2\subseteq X$ זניחה, $B\in\Sigma$ עם $E=B\backslash N_2$.

הוכחה: $1\Rightarrow 2$: יש $A\subseteq E\subseteq B$ עם $A,B\in\Sigma$ וכן $\mu\left(B\backslash A\right)=0$. נגדיר $N_1=E\backslash A$, ואז $N_1\subseteq B\backslash A$, כלומר זניחה, וכן $E=A\uplus N_1$.

$2\Rightarrow 3$: מאחר ונתון כי N_1 זניחה, קיימת $C\in\Sigma$ עם $N_1\subseteq C$, $\mu\left(C\right)=0$. נקח $B=A\cup C\in\Sigma$, ואז $E=A\cup N_1\subseteq A\cup C=B$. כעת ניקח $N_2=B\backslash E$, ואז $N_2\subseteq C$ שכן $A\subseteq E$, ומאחר שמתקיים $\mu\left(C\right)=0$ נקבל כי N_2 זניחה, וכמובן $E=B\backslash N_2$.

$3\Rightarrow 1$: קיימת $N_2\subseteq D\in\Sigma$. עם $\mu\left(D\right)$, ואז $B\backslash D\subseteq E\subseteq B$ וכן $\mu\left(B\backslash\left(B\backslash D\right)\right)\leq\mu\left(D\right)=0$, ולכן $E\in\overline{\Sigma}$. ■

מסקנה 1.7 $\overline{\Sigma}$ היא הסיגמא אלגברה הנוצרת על ידי Σ והקבוצות הזניחות.

1.2 תכונות כמעט בכל מקום

הגדרה 1.8 יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה. תהי $E\subseteq X$ ונאמר כי $x\in X$ מקיימת תכונה P אם $x\in E$. נאמר שהתכונה P מתקיימת כמעט בכל מקום אם $X\backslash E$ זניחה, כלומר אם יש $B\in\Sigma$ עם $\mu\left(B\right)=0$, והתכונה P מתקיימת בכל נקודה מחוץ לקבוצה B (כלומר $X\backslash E\subseteq B$).

דוגמאות יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה. יהיו $f,f_1,f_2,\dots:X\to\mathbb{C},[-\infty,\infty]$ פונקציות.
אומרים כי $f_n\to f$ נקודתית אם לכל $x\in X$ מתקיים $\lim f_n\left(x\right)=f\left(x\right)$.
אומרים כי $f_n\to f$ כמעט בכל מקום אם קיימת קבוצה זניחה $N\subseteq X$ כך שלכל $x\in X\backslash N$ מתקיים $\lim f_n\left(x\right)=f\left(x\right)$. כעת נניח כי f,f_n מדידות. אזי הקבוצה $B=\left\{x\in X\mid \lim f_n\left(x\right)=f\left(x\right)\right\}$ מדידה, וניתן לקחת $N=X\backslash B$ מדידה.

1.3 תמונה של מידה ביחס לפונקציה

הגדרה 1.9 יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה, ותהי $f:X\to Y$ פונקציה. אזי

$$\Sigma_Y := \left\{A\subseteq Y \mid f^{-1}(A)\in\Sigma\right\}$$

היא סיגמא אלגברה של Y (ראינו זאת כבר). הפונקציה

$$\begin{aligned} f_*\mu:\Sigma_y &\to [0,\infty] \\ f_*\mu(A) &= \mu\left(f^{-1}(A)\right) \end{aligned}$$

מידה זו נקראת המידה המושרית מהמידה μ על ידי f.

2 אינטגרציה של פונקציות אל $[0,\infty]$

יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה.

2.1 פונקציות פשוטות

הגדרה 2.1 פונקציה מדידה $s:X\to[0,\infty)$ שמקיימת $|\mathrm{Im}s|<\infty$ נקראת פונקציה פשוטה.

במצב זה, לפונקציה s יש פירוק

$$s=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{A_i}$$

עם A_i מדידה לכל i, עבור

$$\chi_{A_i}=\begin{cases}1 & x\in A_i\\ 0 & x\notin A_i\end{cases}$$

אם ניקח $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ שונים זה מזה ומאפס ואת $A_1,\ldots,A_n$ זרות בזוגות, תאור זה יחיד עד כדי סדר (אם $s=0$, $n=0$).

קרוב קנוני לפונקציה מדידה $f:X\to[0,\infty]$ לכל $n\in\mathbb{N}$ נגדיר פונקציה פשוטה s_n על ידי

$$s_n(x)\begin{cases}\frac{i}{2^n} & \left(\forall 0\le i\le 4^n-1\ \ \frac{i}{2^n}\le f(x)<\frac{i+1}{2^n}\right)\\ 2^n & 2^n\le f(x)\le\infty\end{cases}$$

התכונות של הקרוב הזה הן:

1. לכל n, s_n פונקציה פשוטה.
2. $0\le s_1\le s_2\le\cdots\le f$.
3. $s_n\to f$ נקודתית.
4. אם f חסומה אזי $s_n\to f$ במידה שווה.

2.2 אינטגרציה

הגדרה 2.2 תהי $s = \sum \alpha_i \chi_{A_i}$ פונקציה פשוטה עם $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ שונים זה מזה ומאפס, $A_1 \ldots, A_n$ זרות בזוגות ומדידות. נגדיר

$$\int s = \int s \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X s \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu\left(A_i\right)$$

כמובן, $\int 0 = 0$.

הערה 2.3 אם $0 \le a < \infty$, אזי $\int as = a\int s$ - מיידי.

הערה 2.4 אם $s = \sum \alpha_i \chi_{A_i}$ כאשר $A_1, \ldots, A_n$ מדידות וזרות בזוגות (אבל α_i לאו דווקא שונים זה מזה) אזי

$$\int s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu\left(A_i\right)$$

הוכחה: באינדוקציה על n. אם למשל $\alpha_{n-1} = \alpha_n$, אזי

$$s = \alpha_1 \chi_{A_1} + \cdots + \alpha_{n-2}\chi_{A_{n-2}} + \alpha_{n-1}\chi_{A_{n-1}\cup A_n}$$

ואז לפי אינדוקציה

$$\int s = \alpha_1 \mu\left(A_1\right) + \cdots + \alpha_{n-2}\mu\left(A_{n-2}\right) + \alpha_{n-1}\mu\left(A_{n-1}\cup A_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu\left(A_i\right)$$

■

מסקנה 2.5 אם $t, s : [0, \infty)$ פשוטות אזי $\int t + s = \int t + \int s$.

הוכחה: נניח כי

$$s = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}, t = \sum_{j=0}^{m} \beta_j \chi_{\beta_j}$$

עם $A_1, \ldots, A_n$ מדידות וזרות בזוגות, ועם $\alpha_0 = 0$, $A_0 = X\setminus\bigcup_{i=1}^{n} A_n$, ועם $B_1, \ldots, B_n$ מדידות וזרות בזוגות, ועם $\beta_0 = 0$, ועם $B_0 = X\setminus\bigcup_{i=1}^{n} B_n$.
אזי

$$t + s = \sum_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le m}} \left(\alpha_i + \beta_j\right) \chi_{A_i \cap \beta_j}$$

וכן $(A_i \cap B_j)_{i,j}$ מדידות וזרות בזוגות, ולכן

$$\begin{aligned} \int t+s &= \sum_{i,j} (\alpha_i + \beta_j) \mu (A_i \cap B_j) = \sum_i \alpha_i \mu \left(\sum_j \mu (A_i \cap B_j) \right) + \sum_j \beta_j \left(\sum_i \mu (A_i \cap B_j) \right) = \\ &= \sum_i \alpha_i \mu (A_i) + \sum_j \beta_j \mu (B_j) = \int s + \int t \end{aligned}$$

■

מסקנה 2.6 כאשר $A_1, \ldots, A_n$ מדידות, ולכל i מתקיים $0 \le \alpha_i < \infty$, אזי

$$\int \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu (A_i)$$

הערה 2.7 אם $0 \le s \le t$ פונקציות פשוטות אזי

$$\int s \le \int t$$

הערה 2.8 אם s פשוטה אזי $\int s \in [0, \infty]$.

הגדרה 2.9 תהי $f : X \to [0, \infty]$ מדידה, אזי

$$\int f = \int_X f(x) \, \mathrm{d}\mu(x) = \sup_{0 \le s \le f} \int_X s \, \mathrm{d}\mu \in [0, \infty]$$

כאשר s תמיד פשוטה.

תכונות

1. אם f פשטה ההגדרה שקולה להגדרה הקודמת.
2. אם $0 \le f \le g \le \infty$ מדידות, אזי

$$\int f \le \int g$$

3. תהי $f : X \to [0, \infty]$ מדידה. אזי $\int_X f \, \mathrm{d}\mu = 0$ אם ורק אם $f = 0$ כמעט בכל מקום.

הוכחה: נניח כי האינטגרל הוא 0. לכל n נסמן $E_n = \left\{ x \in X \mid f(x) \ge \frac{1}{n} \right\}$. אזי $f \ge \frac{1}{n} \chi_{E_n} =: s$, ולכן $0 = \int s = \frac{1}{n} \mu (E_n)$

מכאן מתקיים כי

$$\mu\left(\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$$

כלומר $f = 0$ כמעט בכל מקום.

כעת נניח כי f מתאפסת כמעט בכל מקום, ותהי $s = \sum \alpha_i \chi_{A_i} \leq f$, כאשר $\alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0$, וכן $A_1, \ldots, A_n$ מדידות וזרות בזוגות. לכל i מתקיים $\mu(A_i) = 0$ כי $s = 0$ כמעט בכל מקום (כי $f = 0$ כמעט בכל מקום).

לכן $\int s = 0$, ומכאן נובע כי $\int f = 0$. ■

4. אם $f : X \to [0,\infty]$ מדידה וכן $\int_X f < \infty$ אזי $f < \infty$ כמעט בכל מקום.

הוכחה: נסמן $E_\infty = \{x \in X \mid f(x) = \infty\}$. נרצה להראות כי $\mu(E_\infty) = 0$. לכל n נסמן $S_n = n\chi_{E_\infty}$. $s_n \leq f$ ולכן

$$n\mu(E_\infty) = \int s_n \leq \int f < \infty$$

מכאן נקבל כי

$$\mu(E_\infty) \leq \frac{1}{n} \int f$$

וזאת לכל n, ולכן $\mu(E_\infty) = 0$. ■

5. אם $f, g : X \to [0,\infty]$ מדידות, וכן $f \leq g$ כמעט בכל מקום, אזי $\int f \leq \int g$.

הוכחה: נסמן $E = \{x \in X \mid f(x) > g(x)\}$. זו קבוצה מדידה וזניחה. נאפס עליה את שתי הפונקציות, וזה לא ישנה אינטגרל, אבל נקבל $f \leq g$ בכל נקודה. ■

מסקנה 2.10 אם $f = g$ כמעט בכל מקום אזי $\int f = \int g$.

6. תהי $f \geq 0$ מדידה ויהי $c \in [0,\infty]$. אזי $\int cf = c\int f$.

הוכחה: אם $0 \leq c < \infty$ השוויון מידי. נניח כי $c = \infty$. אם $f = 0$ כמעט בכל מקום אזי $cf = 0$ כמעט בכל מקום ושני הצדדים 0. נניח כי f אינה אפס כמעט בכל מקום, אזי $\int f > 0$, ולכן $\infty \cdot \int f = \infty$. כמו כן,

$$\int \infty \cdot f \geq \int nf = n \int f$$

ולכן $\int \infty f = \infty$. ■

בפרט:

$$\int \infty\chi_E = \infty \int \chi_E = \infty \cdot \mu(E) = \begin{cases} \infty & \mu(E) > 0 \\ 0 & \mu(E) = 0 \end{cases}$$

2.3 משפט ההתכנסות המונוטונית

משפט 2.11 יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה. תהיינה $f_n : X \to [0,\infty]$ סדרת פונקציות מדידות כך שמתקיים $0 \le f_1 \le f_2 \le \ldots$. נסמן $f = \lim f_n : X \to [0,\infty]$. אזי f מדידה וכן

$$\int\limits_X f(x)\ \mathrm{d}\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)\ \mathrm{d}\mu(x)$$

הוכחה: ראינו כבר כי f מדידה. האי שוויון בכיוון $\ge$ מיידי (כי $f \ge f_m$ לכל m). נוכיח את אי השוויון השני.די להוכיח כי אם $0 \le s \le f$ פשוטה אזי

$$\int s \le \lim_{n\to\infty} \int f_n$$

יהי $0 < c < 1$. לכל $x \in X$ קיים n שעבורו $c \cdot s(x) \le f_n(x)$: אכן, אם $s(x) = 0$ זה מיידי. נניח כי $s(x) > 0$, אזי

$$0 < c \cdot s(x) < s(x) \le f(x) = \lim f_n(x)$$

ולכן קיים n מתאים. נסמן

$$E_n = \{x \in X \mid c \cdot s(x) \le f_n(x)\}$$

אז E_n מדידה לכל n וכן $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots$, $X = \bigcup E_n$. כמו כן מתקיים

$$\lim \int f_n \leftarrow \int f_n \ge \int \chi_{E_n} \cdot f_n \ge \int \chi_{E_n} \cdot c \cdot s = \int \sum_{i=1}^{k} c \cdot \alpha_i \cdot \chi_{A_i \cap E_n}$$

כאשר $s = \sum \alpha_i \chi_i$, עבור $0 < \alpha_i < \infty$, A_i מדידות וזרות בזוגות. נמשיך את השוויון:

$$\int \sum c\alpha_i \chi_{A_i \cap E_n} = c \cdot \sum \alpha_i \mu(A_i \cap E_n) \to c \sum \alpha_i \mu(A_i) = c \cdot \int s$$

לכן נקבל כי $\lim f_n \ge c \cdot \int s$, וזה נכון לכל $0 < c < 1$, ולכן

$$\lim \int f_n \ge \int s$$

(אם $\int s = 0$ זה טריוויאלי, אם $\int s = \infty$ אזי $\int s = c\int s$. אם $0 < \int s < \infty$ זה נובע מיידית). ∎

טענה 2.12 (חיבוריות) אם $f, g \ge 0$ מדידות אזי

$$\int f + g = \int f + \int g$$

הוכחה: יש $g \nearrow s_n , f \nearrow t_n$ כאשר t_n, s_n פשוטות, ואז $s_n + t_n \nearrow f + g$ ולכן

$$\int f+g \leftarrow \int s_n+t_n = \int s_n + \int t_n \to \int f + \int g$$

■

מסקנה 2.13 אם $0 \le f \le g \le \infty$ מדידות וכן $\int f = \int g < \infty$ אזי $f = s$ כמעט בכל מקום.

הוכחה: יש $0 \le h \le \infty$ מדידה עם $g = f + h$ ואז $\int g = \int f + \int h$. נובע כי $\int h = 0$ ולכן $h = 0$ כמעט בכל מקום. ■

טענה 2.14 (טורים) אם $h_n : X \to [0,\infty]$ מדידות, אזי

$$\int \sum h_n = \sum \int h_n$$

הוכחה: מתקיים

$$\sum_{n=1}^{k} h_n \nearrow \sum_{n=1}^{\infty} h_n$$

ולכן

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int h_n \leftarrow \sum_{n=1}^{\infty} \int h_n = \int \sum_{n=1}^{k} h_n \to \int \sum_{n=1}^{\infty} h_n$$

■

משפט 2.15 (הלמה של בורל וקנטלי) יהיו $E_n \subseteq X$ מדידות לכל n, כך שמתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$$

אזי הקבוצה Γ של כל הנקודות ששייכות לאינסוף מבין E_i היא זניחה (ומדידה).

הוכחה: נסמן $f = \sum_{=1}^{\infty} \chi_{E_n}$. f מדידה, וכן $\Gamma = f^{-1}(\infty)$, לכן Γ מדידה. כמו כן

$$\infty > \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int \chi_{E_n} = \int \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n} = \int f$$

ראינו שנובע כי $f < \infty$ כלומר Γ זניחה. ■

משפט 2.16 (הלמה של פטו) אם $f_n : X \to [0,\infty]$ מדידות, אזי

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \le \liminf_{n\to\infty} \int f_n$$

הוכחה:

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n = \int \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{i\ge n} f_i \right)$$

$n \to \inf_{i\ge n} f_i$ היא סדרה מונוטונית עולה, ולכ השוויון ממשיך:

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n = \int \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{i\ge n} f_i \right) = \lim_{n\to\infty} \int \inf_{i\ge n} f_i$$

לכל $j \ge n$ מתקיים $\int \inf_{i\ge n} f_i \le \int f_j$, ולכן $\int \inf_{i\ge n} f_i \le \inf_{j\ge n} \int f_j$. ממשיכים:

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n = \int \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{i\ge n} f_i \right) = \lim_{n\to\infty} \int \inf_{i\ge n} f_i \le \lim_{n\to\infty} \inf_{j\ge n} \int f_j = \liminf_{n\to\infty} \int f_n$$

■

הגדרה 2.17 אם $E \subseteq X$ מדידה, $f \ge 0$ מדידה, מגדירים

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \int_X \chi_E f \,\mathrm{d}\mu$$

תכונה אם $\mu(E) = 0$ אזי $\int_E f \,\mathrm{d}\mu = 0$ כי $\chi_E \cdot f = 0$ כמעט בכל מקום.

הערה 2.18 בסימונים אלה ראינו כי

$$\Sigma\mid_E = \{A \subseteq X \mid A \in \Sigma, A \subseteq E\} \subseteq \Sigma$$

היא סיגמא אלגברה על E, וברור כי

$$\mu\mid_E := \mu\mid_{\Sigma_E}$$

מידה על $(E, \Sigma\mid_E)$, כלומר $(E, \Sigma\mid_E, \mu\mid_E)$ מרחב מידה, ועבור $f \ge 0$ על X מתקיים

$$\int_E f\mid_E \,\mathrm{d}\mu\mid_E = \int_E f \,\mathrm{d}\mu = \int_X \chi_E f \,\mathrm{d}\mu$$

כפי שהוגדר לעיל (נובע בעזרת הקירוב הקנוני עם פונקציות פשוטות).

2.4 כפל מידה בפונקציה

הגדרה 2.19 תהי $h : X \to [0, \infty]$ פונקציה מדידה. נגדיר פונקציה $\lambda : \Sigma \to [0, \infty]$ על ידי

$$\lambda(E) = \int\limits_E h \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_X \chi_E h \, \mathrm{d}\mu$$

טענה 2.20 λ מידה על (X, Σ).

הוכחה: ברור כי $\lambda(\emptyset) = \int_X 0h \, \mathrm{d}\mu = 0$. כעת נניח כי $E_1, E_2, \ldots$ מדידות וזרות. אזי

$$\lambda\left(\bigcup E_n\right) = \int \chi_{\bigcup E_n} \cdot h \, \mathrm{d}\mu = \int \left(\sum \chi_{E_n}\right) h \, \mathrm{d}\mu = \sum \int \chi_{E_n} h \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$$

■

טענה 2.21 תהי $f : X \to [0, \infty]$ מדידה. אזי

$$\int\limits_X f \, \mathrm{d}\lambda = \int\limits_X fh \, \mathrm{d}\mu$$

הוכחה: תהיינה $s_n \nearrow f$ פשוטות, ואז $s_n h \nearrow fh$. כעת

$$\int\limits_X f \, \mathrm{d}\lambda \leftarrow \int\limits_X s_n \, \mathrm{d}\lambda = \int\limits_X s_n h \, \mathrm{d}\mu \to \int\limits_X fh \, \mathrm{d}\mu$$

השוויון הזה עבור פונקציות פשוטות, שבאמצע, נובע מהנכונות לפונקציות אופיינות χ_E.

■

מסמנים

$$\mathrm{d}\lambda = h \, \mathrm{d}\mu$$