פונקציות ממשיות

© ארזים

2 בנובמבר 2016

1 תזכורות

1.1 סדרות של פונקציות

הגדרה 1.1 בהינתן סדרת פונקציות $\{f_n\}$נאמר שהן מתכנסות נקודתית לפונקציה f, ונסמן $f_n \xrightarrow{p} f$, אם לכל $x \in X$ מתקיים $f_n(x) \to f(x)$.

הגדרה 1.2 בהינתן סדרת פונקציות $\{f_n\}$ נאמר שהן מתכנסות במידה שווה לפונקציה f, ונסמן $f_n \xrightarrow{u} f$, אם

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \to 0$$

משפט 1.3 אם $f_n \xrightarrow{u} f$ וכן $f_n \in C(X)$ אזי $f \in C(X)$.

1.2 מרחבים מטריים

הגדרה 1.4 מטריקה היא פונקציה $d : X \times X \to \mathbb{R}$ שמקיימת:

1. אי שליליות.
2. יחידות ($d(x,y) = 0 \iff x = y$).
3. סימטריה.
4. אי שוויון המשולש.

דוגמאות

1. מטריקה אוקלידית: $X = \mathbb{R}^n$,

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2}$$

2. מטריקה דיסקרטית: X קבוצה,

$$d(x,y)=\begin{cases}1 & x\neq y\\ 0 & x=y\end{cases}$$

3. מטריקת cut-off: בהינתן מטריקה d:

$$\rho(x,y)=\min\{d(x,y),1\}$$

חשבו מדוע זה לא משנה את הטופולוגיה.

1.3 רציפות

הגדרה 1.5 יהיו $(X,d),(Y,\rho)$ שני מרחבים מטריים, ותהי $f:(X,d)\to(Y,\rho)$. נאמר שהפונקציה f רציפה בנקודה $x_0\in X$ אם לכל סדרה $x_n\to x_0$ מתקיים

$$f(x_n)\to f(x_0)$$

נאמר שהפונקציה f רציפה אם היא רציפה בכל נקודה $x_0\in X$.

משפט 1.6 התנאים הבאים שקולים:

1. לכל $x_n\to x$ מתקיים $f(x_n)\to f(x)$.
2. לכל $x\in X$ ולכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שמתקיים

$$d(x,y)\leq\delta\Rightarrow\rho(f(x),f(y))\leq\varepsilon$$

3. לכל קבוצה פתוחה $U\subseteq Y$, הקבוצה $f^{-1}(U)\subseteq X$ פתוחה.
4. לכל קבוצה סגורה $F\subseteq Y$, הקבוצה $f^{-1}(F)\subseteq X$ סגורה.

הוכחה: נוכיח רק $3\Leftarrow 2$ (למעשה נוכיח $3\Leftarrow 1$, אבל פשוט להראות שקילות בין $1,2$ כמו בחדו"א 1).

תהי U קבוצה פתוחה ונניח בשלילה כי $f^{-1}(U)$ אינה פתוחה. לכן קיימת $x_0\in f^{-1}(U)$ כך שלכל $n>1$ מתקיים

$$B_d\left(x_0,\frac{1}{n}\right)\cap\left(f^{-1}(U)\right)^C$$

לכל n נבחר x_n בחיתוך הזה. בפרט מתקיים $d(x_0,x_n)<\frac{1}{n}$, ולכן $x_n\to x_0$. לכן מתקיים $f(x_n)\to f(x_0)$. משום שהקבוצה U פתוחה קיים $\varepsilon>0$ המקיים

$$B_\rho(f(x_0),\varepsilon)\subseteq U$$

בפרט, לכל n גדול מספיק, מתקיים

$$f\left(x_n\right) \in B_\rho\left(f\left(x_0\right), \varepsilon\right) \subseteq U$$

ולכן

$$x_n \in f^{-1}\left(U\right) \cap \left(f^{-1}\left(U\right)\right)^C = \emptyset$$

בסתירה. $\blacksquare$

למה 1.7 יהי $c > 0$, X מרחב מטרי, $M \subseteq X$ קבוצה סגורה, $h : M \to [-c, c]$ רציפה. קיימת $g : X \to \left[-\frac{c}{3}, \frac{c}{3}\right]$ רציפה, וכן לכל $x \in M$, מתקיים

$$\left|g\left(x\right) - h\left(x\right)\right| \leq \frac{2}{3}c$$

הוכחה: נסמן

$$A = h^{-1}\left[-c, -\frac{c}{3}\right], B = h^{-1}\left[\frac{c}{3}, c\right]$$

A, B סגורות, שכן h רציפה, ולכן מתנאי 4 מהמשפט הקודם הן סגורות. נגדיר

$$\varphi\left(x\right) = \frac{d\left(x, A\right)}{d\left(x, A\right) + d\left(x, B\right)}$$

כעת נגדיר גם

$$g\left(x\right) = \frac{2}{3}c \cdot \left(\varphi\left(x\right) - \frac{1}{2}\right)$$

בשיעורי הבית נראה כי φ רציפה. לכן גם g רציפה. כמו כן, $0 \leq \varphi \leq 1$ בבירור, ולכן

$$g\left(x\right) : X \to \left[-\frac{c}{3}, \frac{c}{3}\right]$$

נראה כי לכל $x \in M$ מתקיים

$$\left|h\left(x\right) - g\left(x\right)\right| \leq \frac{2}{3}c$$

נניח כי $x \in A$. במקרה זה מתקיים $\varphi(x) = 0$, ולכן $g(x) = -\frac{c}{3}$. מצד שני, $x \in A$, ולכן

$$-c \leq h(x) \leq -\frac{c}{3}$$

לכן בסך הכל נקבל כי

$$|g(x) - h(x)| \leq \frac{2}{3}c$$

אם $x \notin A$ נניח כי $x \in B$. באופן דומה, $\varphi(x) = 1$, ולכן $g(x) = \frac{c}{3}$. מצד שני, $x \in B$, ולכן

$$\frac{c}{3} \leq h(x) \leq c$$

בסך הכל נקבל

$$|g(x) - h(x)| \leq \frac{2}{3}c$$

במקרה השלישי, $x \notin B, x \notin A$. לכן מתקיים $|h(x)| \leq \frac{c}{3}$. לכן

$$|h(x) - g(x)| \leq |h(x)| + |g(x)| \leq \frac{2}{3}c$$

■

משפט 1.8 (משפט Tietze) יהי (X,d) מרחב מטרי, ותהי $M \subseteq X$ קבוצה סגורה. לכל $f : M \to [0,1]$ רציפה קיימת הרחבה רציפה השומרת על החסמים. במילים אחרות: קיימת $g : X \to [0,1]$ רציפה המקיימת

$$g|_M = f$$

הוכחה: נגדיר סדרת פונקציות: $h_1 = f$, $c_1 = 1$. מהלמה קיימת $g_1 : X \to \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ רציפה המקיימת

$$\max_M |f - g_1| \leq \frac{2}{3}$$

כעת, $h_2 = f - g_1$, $c_2 = \frac{2}{3}$. מהלמה קיימת $g_2 : X \to \left[-\frac{2}{9}, \frac{2}{9}\right]$ המקיימת

$$\max_M |f - g_1 - g_2| \leq \frac{4}{9}$$

בשלב הכללי, נסמן

$$h_n = f - \sum_{k=1}^{n-1} g_k$$

וזו רציפה, המקיימת $\operatorname{Im}\left(h_n\right) \subseteq \left[-\left(\frac{2}{3}\right)^n, \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$. נבחר $c_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$, ונקבל מהלמה g_n רציפה המקיימת

$$\max_M \left|h_n - g_n\right| < \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

כעת נסמן

$$g\left(x\right) = \sum_{k=1}^{\infty} g_n\left(x\right)$$

נראה כי יש כאן התכנסות במידה שווה לפי קריטריון קושי:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} g_k\left(x\right) - \sum_{k=1}^{m} g_k\left(x\right)\right| \leq \sum_{k=m}^{\infty} \left|g_k\left(x\right)\right| \leq \sum_{k=m}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k \xrightarrow{m\to\infty} 0$$

כעת נראה כי

$$\max_m \left|f\left(x\right) - g\left(x\right)\right| = 0$$

זאת משום שמתקיים לכל n:

$$\max_M \left|f-g\right| \leq \max_M \left|f - \sum_{=1}^{n} g_k\right| + \max_M \left|\sum_{k=1}^{n} g_k - g\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

■