<u>פונקציות ממשיות</u>

© ארזים

22 בנובמבר 2016

1 מידות

הגדרה 1.1 יהי $(X, \mathcal{B})$ מרחב מדיד. פונקציה $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ תיקרא <u>מידה</u> אם מתקיים:

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. (אי שליליות) $\mu \geq 0$.
3. (אדיטיביות בת מניה) לכל $\{E_n\} \subseteq B$ זרות בזוגות מתקיים $\mu\left(\bigcup E_n\right) = \sum \mu(E_n)$.

μ היא מידת הסתברות אם $\mu(X) = 1$. μ תיקרא סיגמא סופית אם קיימים $\{A_n\} \subseteq \mathcal{B}$ כך שמתקיים $\mu(A_n) < \infty$ וגם $X = \bigcup A_n$.

דוגמאות

1. $X = \mathbb{R}$ עם הסיגמא אלגברה של בורל $\mathcal{B}$. נגדיר

   $$\mu(A) = |A \cap \mathbb{Z}|$$

   זו מידה סיגמא סופית, ולא מידת הסתברות.
2. $X = \{1, 2, 3\}, \mathcal{B} = 2^X$.

   $$\mu(\{1\}) = \frac{1}{2}, \mu(\{2\}) = \mu(\{3\}) = \frac{1}{4}$$

   זו מידת הסתברות.

משפט 1.2 יהי $(X, \mathcal{B})$ מרחב מדיד, ותהי $\mathcal{A}$ אלגברה שיוצרת את $\mathcal{B}$. תהיינה μ, ν 2 מידות כך שמתקיים:

1. לכל $A \in \mathcal{A}$ מתקיים $\mu(A) = \nu(A)$.
2. קיימות $A_n \in \mathcal{A}$ כל שמתקיים $X = \bigcup A_n, \mu(A_n) < \infty$.

אזי $\mu(B) = \nu(B)$ לכל $B \in \mathcal{B}$.

הוכחה: ראשית נראה למה.

למה 1.3 תחת הנחות המשפט, לכל מידה סופית μ, לכל קבוצה $B\in\mathcal{B}$ ולכל $\varepsilon>0$ קיימת $\mathcal{A}\ni A\subseteq B$ כך שמתקיים $\mu(A\Delta B)<\varepsilon$.

הוכחה: נגדיר

$$\mathcal{C}=\{B\in\mathcal{B}\mid\forall\varepsilon>0\exists A\in\mathcal{A}.A\subseteq B\wedge\mu(A\Delta B)<\varepsilon\}$$

בבירור זה מתקיים $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{C}\subseteq B$. אם נראה כי $\mathcal{C}$ מחלקה מונוטונית ואלגברה, נקבל $\mathcal{C}=\mathcal{B}$ ממשפט המחלקה המונוטונית, כפי שרצינו.

אלגברה: בתרגיל הבית.

מחלקה מונוטונית: תהיינה $\{B_n\}\subseteq\mathcal{C}$. בלי הגבלת הכלליות, הן זרות בזוגות, כי אחרת נגדיר $\mathcal{C}\ni B_n'=B_n\backslash\bigcup_{i=1}^{n-1}B_i$ שכן $\mathcal{C}$ אלגברה. יהי $\varepsilon>0$. משום שהמידה סופית קיים N_0 כך שמתקיים $\mu\left(\bigcup_{n=N_0}^{\infty}B_n\right)<\frac{\varepsilon}{2}$. כעת, לכל $1\leq k\leq N_0$, קיימת $A_k\in\mathcal{A}$ כך שמתקיים $\mu(A_k\Delta B_k)<\frac{\varepsilon}{100\cdot2^k}$ וגם $A_k\subseteq B_k$, וכן $\{A_k\}$ זרות בזוגות. נשים לב כי

$$1_{A\Delta B}=|1_A-1_B|$$

ולכן

$$\begin{aligned}\mu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)\Delta\left(\bigcup_{k=1}^{N_0}A_k\right)\right) &= \int 1_{\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)\Delta\left(\bigcup_{k=1}^{N_0}A_k\right)}\,\mathrm{d}\mu=\int\left|\sum_{n=1}^{\infty}1_{B_n}-\sum_{k=1}^{N_0}1_{A_n}\right|\mathrm{d}\mu\leq\\ &\leq \sum_{n=N_0}^{\infty}\mu(B_n)+\sum_{n=1}^{N_0}\mu(A_n\Delta B_n)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{100}\sum_{n=1}^{N_0}2^{-n}<\varepsilon\end{aligned}$$

עבור החיתוך של קבוצות, מספיק להניח שהן מוכלות זו בזו. כעת לכל ε קיים N_0 כך שמתקיים

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n\backslash B_{N_0}\right)<\frac{\varepsilon}{2}$$

נקרב את החיתוך על ידי הקבוצה שמקרבת את B_{N_0}.

בסך הכל, סיימנו. ∎

כעת נחזור להוכחה של המשפט.

ראשית נניח כי μ סופית. נניח בשלילה כי קיימת $B\in\mathcal{B}$ כך שמתקיים $\mu(B)\neq\nu(B)$. בלי הגבלת הכלליות $\mu(B)-\nu(B)=\varepsilon>0$.

מהלמה קיימות קבוצות $A_\varepsilon^1,A_\varepsilon^2\subseteq B$ כך שמתקיים $\mu\left(A_\varepsilon^1\Delta B\right),\nu\left(A_\varepsilon^2\Delta B\right)<\frac{\varepsilon}{4}$. נסמן $A_\varepsilon=A_\varepsilon^1\cap A_\varepsilon^2$, וכעת $\mu(A_\varepsilon\Delta B),\nu(A_\varepsilon\Delta B)<\frac{\varepsilon}{4}$. כעת:

$$\begin{aligned}\mu(B) &\leq \mu(A_\varepsilon)+\mu(A_\varepsilon\Delta B)\leq\nu(A_\varepsilon)+\frac{\varepsilon}{4}<\nu(B)+\nu(A_\varepsilon\Delta B)+\frac{\varepsilon}{4}<\nu(B)+\frac{\varepsilon}{2}\\ \mu(B)-\nu(B) &< \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

בסתירה.

אם μ אינה סופית, קיימות $A_n \in \mathcal{A}$ זרות כך שמתקיים $\mu(A_n) < \infty$ וגם $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. נגדיר

$$\tilde{\mu}(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\mu(B \cap A_n)}{1 + \mu(A_n)}$$

באופן דומה נגדיר $\tilde{\nu}$. לכל $A \in \mathcal{A}$ מתקיים $\tilde{\mu}(A) = \tilde{\nu}(A)$. מהמקרה הראשון, $\tilde{\mu} = \tilde{\nu}$, ולכן לכל n מתקיים

$$\mu(A \cap A_n) = \nu(A \cap A_n)$$

לכל $A \in \mathcal{B}$, ובפרט $\mu = \nu$. ■

מסקנה 1.4 מספיק להגדיר מילה על האלגברה שיוצרת את הסיגמא אלגברה, כל עוד היא סיגמא סופית.